Neuer Beweis zweier klassischer Sätze über Diophantische Approximationen.

Von OSKAR PERRON in München.

I. Von A. HURWITZ stammt der

Satz 1. *Zu jeder irrationalen Zahl α gibt es unendlich viele rationale Brüche x/y, für welche die Approximation gilt:*

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,y^2}.$$

Von KORKINE, ZOLOTAREFF und MARKOFF stammt der

Satz 2. *Sind a, b, c reelle Zahlen und ist $b^2 - 4ac = 1$, so gibt es unendlich viele Paare ganzer rationaler Zahlen x, y, für welche die Ungleichung gilt:*

$$|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Der Satz 1 ist nicht etwa als der Spezialfall $a = 0$, $b = -1$, $c = \alpha$ in Satz 2 enthalten. Denn in diesem Spezialfall hat die Ungleichung von Satz 2 die unendlich vielen trivialen Lösungen $x =$ beliebig, $y = 0$, während Satz 1 unendlich viele Lösungen mit $y \neq 0$ behauptet. Zu beachten ist auch, daß in Satz 1 das Zeichen $<$ steht, während in Satz 2 beispielsweise bei der Form

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}xy - \frac{1}{\sqrt{5}}y^2$$

offenbar nur Gleichheit erreichbar ist.

II. Für beide Sätze gibt es heute mehrere Beweise, und zwar wird Satz 1 in **[1]**, **[2]**, **[5]**, **[6]** mit Hilfe von Kettenbrüchen bewiesen[1]), in [3], **[7]** ohne Kettenbrüche. Satz 2 wird in **[4]** mit und in **[8]** ohne Kettenbrüche bewiesen. Hier soll für beide Sätze noch je ein einfacher Beweis ohne Kettenbrüche gegeben werden. Dabei wird das folgende Lemma gebraucht:

---

[1]) Die fetten Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Lemma. *Sind δ, λ zwei Zahlen zwischen* 0 *und* 1, *so ist von den drei offenbar positiven Zahlen*

$$\delta,\ \lambda+\delta\lambda^2,\ 1-\lambda-\delta(1-\lambda)^2$$

wenigstens eine kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$. *Nur in dem Sonderfall* $\delta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\lambda=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, *also niemals für rationales* λ, *sind alle drei gleich* $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

III. Beweis des Lemmas. Man nehme an, es sei

$$\delta \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{1}$$

$$\lambda+\delta\lambda^2 \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{2}$$

$$1-\lambda-\delta(1-\lambda)^2 \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

Addiert man dann die mit $(1-\lambda)^2$ multiplizierte Ungleichung (1) zu (3), so kommt $1-\lambda \geqq [(1-\lambda)^2+1]/\sqrt{5}$ und nach leichter Umformung:

$$\left(1-\lambda-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}.$$

Daher ist $\lambda+\frac{1}{2}\sqrt{5}-1 \leqq \frac{1}{2}$, oder also

$$\lambda \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{4}$$

Multipliziert man (2) mit $(1-\lambda)^2$ und (3) mit λ^2, so folgt durch Addition $\lambda(1-\lambda) \geqq [(1-\lambda)^2+\lambda^2]/\sqrt{5}$, oder nach leichter Umformung:

$$\left(1-\lambda-\frac{\sqrt{5}}{2}\lambda\right)^2 \leqq \frac{1}{4}\lambda^2.$$

Daher ist $1-\lambda-\frac{\sqrt{5}}{2}\lambda \leqq \frac{1}{2}\lambda$, oder also

$$\lambda \geqq \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) zusammen folgt

$$\lambda=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}),\ \text{also}\ 1-\lambda=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \tag{6}$$

und nach (3) ist dann

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\delta\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{\sqrt{5}},$$

oder also

$$\delta\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

Zusammen mit (1) ergibt das:

(7) $$\delta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Wenn also nicht (6) und (7) gilt, muß wenigstens eine der drei Annahmen (1), (2), (3) falsch sein. Damit ist das Lemma bewiesen.

IV. Beweis von Satz I. Mit Hilfe des Dirichletschen Schubladenprinzips schließt man in bekannter Weise sofort auf die Existenz unendlich vieler Paare ganzer Zahlen x, y, für die $\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$ ist. Triviälerweise kann man x, y teilerfremd und $y > 0$ annehmen. Setzt man demgemäß

(8) $$\alpha - \frac{x}{y} = \varepsilon \frac{\delta}{y^2},$$

wo $0 < \delta < 1$ und $\varepsilon = \pm 1$ ist, und bestimmt zwei ganze Zahlen x_1, y_1 (eindeutig) so, daß

(9) $$xy_1 - yx_1 = \varepsilon, \qquad 0 < y_1 < y$$

ist, so hat man zunächst

$$\left|\alpha - \frac{x_1}{y_1}\right| = \left|\alpha - \frac{x}{y} + \frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right| \leqq \left|\alpha - \frac{x}{y}\right| + \frac{1}{yy_1} < \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y},$$

$$\left|\alpha - \frac{x-x_1}{y-y_1}\right| = \left|\alpha - \frac{x}{y} + \frac{x}{y} - \frac{x-x_1}{y-y_1}\right| \leqq \left|\alpha - \frac{x}{y}\right| + \frac{1}{y(y-y_1)} < \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}.$$

Die linken Seiten sind also beliebig klein, wenn nur y groß genug ist, und daraus folgt, daß es entsprechend den unendlich vielen verschiedenen Brüchen $\frac{x}{y}$ auch unter den Brüchen $\frac{x_1}{y_1}$ unendlich viele verschiedene gibt, und ebenso unter den Brüchen $\frac{x-x_1}{y-y_1}$.

Definiert man weiter zwei Zahlen δ_1, δ_2 durch

(10) $$\alpha - \frac{x_1}{y_1} = \varepsilon \frac{\delta_1}{y_1^2}, \quad \alpha - \frac{x-x_1}{y-y_1} = -\varepsilon \frac{\delta_2}{(y-y_1)^2},$$

so ist mit Rücksicht auf (8) und (9)

$$\varepsilon\delta_1 = y_1^2\left(\alpha - \frac{x_1}{y_1}\right) = y_1^2\left(\frac{\varepsilon\delta}{y^2} + \frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right) = y_1^2\left(\frac{\varepsilon\delta}{y^2} + \frac{\varepsilon}{yy_1}\right),$$

also, wenn $\frac{y_1}{y} = \lambda$ gesetzt wird:

$$\delta_1 = \lambda + \delta\lambda^2.$$

Ferner ist, wieder mit Rücksicht auf (8) und (9)

$$-\varepsilon\delta_2 = (y-y_1)^2\left(\alpha - \frac{x-x_1}{y-y_1}\right) = (y-y_1)^2\left(\frac{\varepsilon\delta}{y^2} + \frac{x}{y} - \frac{x-x_1}{y-y_1}\right) =$$

$$= (y-y_1)^2\left(\frac{\varepsilon\delta}{y^2} - \frac{\varepsilon}{y(y-y_1)}\right),$$

also, da $\frac{y-y_1}{y}=1-\lambda$ ist:

$$\delta_2=1-\lambda-\delta(1-\lambda)^2.$$

Aus (8) und (10) hat man also:

$$\left|\alpha-\frac{x}{y}\right|=\frac{\delta}{y^2},\quad \left|\alpha-\frac{x_1}{y_1}\right|=\frac{\lambda+\delta\lambda^2}{y_1^2},\quad \left|\alpha-\frac{x-x_1}{y-y_1}\right|=\frac{1-\lambda-\delta(1-\lambda)^2}{(y-y_1)^2}.$$

Da aber $\lambda=\frac{y_1}{y}$ rational ist und ebenso wie δ zwischen 0 und 1 liegt, ist nach dem Lemma von den drei rechts auftretenden Zählern wenigstens einer kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

V. Beweis von Satz 2. Für $a=0$, also $b=\pm 1$ ist nichts zu beweisen, weil die Ungleichung des Satzes dann die unendlich vielen Lösungen $x=$ beliebig, $y=0$ hat[2]). Sei daher jetzt $a\neq 0$. Wegen $b^2-4ac=1$ ist dann

$$\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2 &= a\left(x+\frac{b+1}{2a}y\right)\left(x+\frac{b-1}{2a}y\right)= \\ &= -a\left(\frac{1+b}{2a}y+x\right)\left(\frac{1-b}{2a}y-x\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Ist $\frac{1-b}{2a}$ rational, so kann man die letzte Klammer durch unendlich viele (zueinander proportionale) Paare x, y zu null machen, und es ist nichts mehr zu beweisen. Daher sei jetzt $\frac{1-b}{2a}$ irrational. Setzt man dann

$$\frac{1-b}{2a}y-x=\frac{\varepsilon\delta}{y},\quad \text{also}\quad 2ax+by=y-\frac{2a\varepsilon\delta}{y}, \tag{12}$$

wo $y>0$, $\delta>0$, $\varepsilon=\pm 1$ ist, so gibt es nach Satz 1 unendlich viele Paare x, y, für die $\delta<1/\sqrt{5}$ ist.

Führt man jetzt wieder wie beim Beweis von Satz 1 die Zahlen x_1, y_1 ein und setzt

$$ax^2+bxy+cy^2=-\varepsilon\delta', \tag{13}$$

$$ax_1^2+bx_1y_1+cy_1^2=-\varepsilon\delta_1', \tag{14}$$

$$a(x-x_1)^2+b(x-x_1)(y-y_1)+c(y-y_1)^2=\varepsilon\delta_2', \tag{15}$$

so wird Satz 2 bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß bei genügend großem y von den drei Zahlen $|\delta'|$, $|\delta_1'|$, $|\delta_2'|$ wenigstens eine $\leq\frac{1}{\sqrt{5}}$ ist.

---

[2]) Übrigens hat sie auch unendlich viele Lösungen mit $y\neq 0$, was für rationales α trivial ist und für irrationales α aus Satz 1 folgt.

Nun folgt zunächst aus (13), (11) und (12):

$$\varepsilon\delta' = a\left(\frac{1+b}{2a}y + \frac{1-b}{2a}y - \frac{\varepsilon\delta}{y}\right)\frac{\varepsilon\delta}{y} = \varepsilon\delta - \frac{a\varepsilon^2\delta^2}{y^2};$$

daher:

$$\delta' = \delta - \frac{a\varepsilon\delta^2}{y^2}.$$

Somit liegt für genügend großes y der Quotient $\frac{\delta'}{\delta}$ beliebig nahe bei 1, so daß wegen $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{5}}$ insbesondere $0 < \delta' < 1$ ist.

Aus (13) und (14) folgt durch Elimination von c unter Berücksichtigung von (9)

$$\varepsilon(\delta_1' y^2 - \delta' y_1^2) = a(x^2y_1^2 - x_1^2y^2) + b(xyy_1^2 - x_1y_1y^2) =$$
$$= a\varepsilon(xy_1 + x_1y) + b\varepsilon yy_1 = a\varepsilon(2xy_1 - \varepsilon) + b\varepsilon yy_1 = (2ax + by)\varepsilon y_1 - a.$$

Daher

$$\delta_1' = \delta'\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 + \frac{2ax+by}{y}\cdot\frac{y_1}{y} - \frac{a\varepsilon}{y^2} = \delta'\left(\frac{y_1}{y} + \frac{2ax+by}{2\delta' y}\right)^2 - \frac{(2ax+by)^2}{4\delta' y^2} - \frac{a\varepsilon}{y^2}.$$

Mit Rücksicht auf (13) ist aber

$$(2ax+by)^2 = 4a(ax^2+bxy) + b^2y^2 = 4a(-cy^2 - \varepsilon\delta') + b^2y^2 = y^2 - 4a\varepsilon\delta',$$

so daß die vorige Formel übergeht in:

$$\delta_1' = \delta'\left(\frac{y_1}{y} + \frac{2ax+by}{2\delta' y}\right)^2 - \frac{1}{4\delta'}.$$

Setzt man hier für $2ax+by$ den Ausdruck aus (12), so kommt schließlich:

$$\delta_1' = \delta'\left(\frac{y_1}{y} + \frac{1}{2\delta'} - \frac{a\varepsilon\delta}{\delta' y^2}\right)^2 - \frac{1}{4\delta'} = \delta'\left(\frac{y_1}{y} - \frac{a\varepsilon\delta}{\delta' y^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{y} - \frac{a\varepsilon\delta}{\delta' y^2}\right).$$

Wenn man c aus (13) und (15) eliminiert, so führt eine ganz analoge Rechnung, wobei lediglich x_1, y_1, δ_1' durch $x_1 - x, y_1 - y, -\delta_2'$ zu ersetzen sind, zu der Formel

$$-\delta_2' = \delta'\left(\frac{y_1 - y}{y} - \frac{a\varepsilon\delta}{\delta' y^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y}{y} - \frac{a\varepsilon\delta}{\delta' y^2}\right).$$

Setzt man nun

(16) $$\frac{y_1}{y} - \frac{a\varepsilon\delta}{\delta' y^2} = \lambda,$$

so gehen die beiden letzten Formeln über in

(17) $$\delta_1' = \lambda + \delta'\lambda^2, \quad \delta_2' = 1 - \lambda - \delta'(1-\lambda)^2.$$

Nun liegt für genügend großes y, wie oben bemerkt, δ/δ' beliebig nahe bei 1, also λ nach (16) beliebig nahe bei y_1/y. Sollte also $\lambda \leqq 0$ sein, so ist $|\lambda|$ sehr klein, also nach (17) gewiß $|\delta_1'| < 1/\sqrt{5}$. Sollte aber $\lambda \geqq 1$ sein, so ist $|\lambda - 1|$ sehr klein, nach (17) also $|\delta_2'| < 1/\sqrt{5}$. Daher bleibt nur noch der Fall $0 < \lambda < 1$ zu untersuchen; in diesem ist aber nach dem Lemma von den drei (positiven) Zahlen δ', δ_1', δ_2' wenigstens eine $\leqq 1/\sqrt{5}$. Damit ist nun alles bewiesen.

Literatur.

[1] E. Borel, Contribution à l'analyse arithmétique du continu, *Journal de math. pures et appliquées,* (5) **9** (1903), S. 329 - 375.

[2] A. Hurwitz, Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, *Math. Annalen,* **39** (1891), S. 279—284, oder Werke, Bd. II, S. 122 - 128.

[3] A. Khintchine, Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes, *Math. Annalen,* **111** (1935), S. 631—637.

[4] A. A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Annalen,* **15** (1879), S. 381—406.

[5] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig, 1913; zweite Auflage 1929), § 14.

[6] O. Perron, *Irrationalzahlen* (Leipzig, 1921; dritte Auflage 1947), § 36.

[7] O. Perron, Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln, *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Abteilung,* 1931, S. 129—154.

[8] O. Perron, Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen, *Math. Zeitschrift,* **35** (1932), S. 563—578.

(Eingegangen am 1. September, 1949.)