Remarque sur le prolongement fonctionnel linéaire et le problème de Dirichlet.

Par M. BRELOT à Grenoble (France).

1. Considérons dans l'espace euclidien R_τ de dimension $\tau \geqq 2$ un domaine Ω, par exemple borné, de frontière Ω^*. A toute donnée f finie continue réelle sur Ω^* correspond la solution du problème de Dirichlet généralisé ou fonction de Wiener H_f; et KELDYCH[1]) a montré que c'est la seule fonction harmonique dans Ω qui soit, en chaque point, fonction linéaire homogène croissante de f et qui coïncide avec la solution du problème de Dirichlet classique (tendant vers $f(P)$ en tout point P de Ω^*) lorsque celle ci existe. C'est-à-dire que, si on part de cette solution classique qui définit (avec la notion d'ordre de fonctions correspondant à une même inégalité partout) une application linéaire homogène croissante de l'ensemble $\mathfrak{T}$ de certains f dans l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ des fonctions harmoniques réelles dans Ω, il y a une seule manière de faire le prolongement à tous les f en conservant linéarité, homogénéité, et croissance.

Or, si l'on examine le *théorème de Hahn—Banach*[2]) *sur le prolongement fonctionnel* lorsque, l'espace de la variable étant ordonné, la fonction linéaire et la fonction convexe majorante sont croissantes d'où la croissance de la fonction prolongée, on va voir qu'il est aisé de l'adapter à notre application linéaire et que l'unicité, connue à priori, entraine l'identité avec H_f de deux fonctions harmoniques $\underline{D}_f, \overline{D}_f$ que précise l'énoncé suivant:

Théorème 1. *Reprenons f finie continue sur la frontière Ω^* du domaine borné Ω. Les solutions du problème de Dirichlet classique prenant des valeurs-frontière $\leqq f$ ont une enveloppe supérieure finie continue sousharmonique* $\underline{\mathfrak{D}}_f$

---

[1]) M. V. KELDYCH, Sur le problème de Dirichlet, *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS*, **32** (1941), p. 308–309. Au lieu de la croissance en f, KELDYCH suppose d'ailleurs, ce qui est équivalent, que la fonction soit comprise (au sens large) entre les bornes de f. Il ne précise pas non plus la nature du domaine et le nombre des dimensions de l'espace, mais nos hypothèses suffisent et il sera discuté de ce point plus loin.

[2]) Voir S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires* (Varsovie, 1932), p. 27–29.

dont la plus petite majorante harmonique $\underline{D}_f$ *est la borne supérieure des solutions considérées dans l'ensemble ordonné* $\mathcal{E}$. *De même les solutions* $\geqq f$ *à la frontière ont une enveloppe inférieure* $\overline{\mathfrak{D}}_f$ *finie, continue surharmonique dont la plus grande minorante harmonique* $\overline{D}_f$ *est la borne inferieure de ces solutions. De plus* $\underline{D}_f = \overline{D}_f = H_f$.

D'abord toute famille de fonctions harmoniques u dans un domaine, bornées supérieurement dans leur ensemble, a une enveloppe supérieure continue sousharmonique; car ces fonctions sont également continues en chaque point quand on prend sur la droite de leurs valeurs la structure uniforme de la droite numérique achevée, c'est-à-dire que les e^u sont également continues au sens ordinaire[3]). L'enveloppe est donc continue et la sousharmonicité est immédiate. D'où l'existence d'une borne supérieure des u dans l'ensemble ordonné des fonctions harmoniques sur le domaine. Il s'ensuit les résultats concernant séparément $\underline{\mathfrak{D}}_f$, $\underline{D}_f$ et de même $\overline{\mathfrak{D}}_f$, $\overline{D}_f$.

Cherchons maintenant à adapter la démonstration de Banach en remplaçant la fonction convexe homogène par $\overline{D}_f$ qui satisfait visiblement à

$$\overline{D}_{f+g} \leqq \overline{D}_f + \overline{D}_g, \quad \overline{D}_{tf} = t\overline{D}_f \quad (t \geqq 0),$$

$\overline{D}_f$ est croissante de f et majore la fonction linéaire homogène H_f prise dans l'espace vectoriel $\mathcal{T}$.

Quels que soient $f' \in \mathcal{T}$, $f'' \in \mathcal{T}$, $f_0 \overline{\in} \mathcal{T}$ on verra que

$$-\overline{D}_{-f'-f_0} - H_{f'} \leqq \overline{D}_{f''+f_0} - H_{f''}$$

La borne inférieure dans $\mathcal{E}$ du premier membre pour f' variable dans $\mathcal{T}$ et la borne supérieure dans $\mathcal{E}$ du second membre pour f'' variable dans $\mathcal{T}$ sont justement $\underline{D}_{f_0}$ et $\overline{D}_{f_0}$.

Si elles étaient distinctes on pourrait choisir avec arbitraire une fonction harmonique intermédiaire h_0 puis faire un premier prolongement P_φ défini pour les $\varphi = f + tf_0$ ($f \in \mathcal{T}$, t réel) selon $P_\varphi = H_f + th_0$ et dont on voit qu'il est additif, homogène majoré par $\overline{D}_\varphi$.

Le raisonnement final de BANACH s'applique encore et nous fournirait un prolongement pour tous les f, majoré par $\overline{D}_f$ croissant, donc croissant; et l'arbitraire de h_0 correspondant à f_0 serait contraire à l'unicité. On a donc bien $\underline{D}_f = \overline{D}_f$ et comme a priori elles encadrent H_f, le théorème s'ensuit.

2. Ces développements appellent divers commentaires et recherches.

D'abord on peut songer à étendre notre démonstration de prolongement à des espaces vectoriels généraux convenablement ordonnés. C'est ce qu'a fait M. CHOQUET dans des recherches et ce n'est peut-être pas sans rapport avec des résultats récents (à l'impression) de NACHBIN sur le prolongement

---

[3]) Voir M. BRELOT, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, *Annales de l'École Normale Supérieure,* **61** (1945), p. 301–332 et particulièrement p. 315. Cela peut se déduire des inégalités de HARNACK.

d'une application linéaire dans un espace normé, d'un sous-espace d'un autre espace normé.

D'autre part on songera à étendre le théorème 1 à un domaine plus général (par exemple dans l'espace compact $\overline{R}_r$, Ω étant seulement de complémentaire non polaire[4]) ou à un problème de Dirichlet plus général du type "ramifié" ou géodésique[5]). Tout dépend des conditions de validité du résultat d'unicité de Keldych, résultat qui est conséquence presque immédiate de la propriété suivante[6]) des points réguliers donnée aussi par KELDYCH[7]):

(K): Si 0 est point-frontière régulier de Ω borné, il existe f finie continue sur Ω atteignant son minimum au seul point 0 et pour laquelle le problème de Dirichlet classique admet une solution.

C'est cette propriété qu'il faudrait étendre. Notons seulement qu'elle entraine, soit directement, soit par l'intermédiaire du théorème 1, et cela ne parait pas avoir été encore explicité, que la solution généralisée H_f (f finie continue) est l'enveloppe supérieure des fonctions finies continues dans $\Omega \cup \Omega^*$ sousharmoniques dans Ω majorées par f sur Ω^*[8])

Enfin on peut se demander avec M. CHOQUET, si plutôt et mieux que ce dernier énoncé, on n'aurait pas $H_f = \mathfrak{D}_f$. Il est aisé de voir que c'est inexact, avec un seul point irrégulier qui serait point-frontière isolé (Ω cercle pointé), mais le résultat parait probable lorsque la frontière est *débarrassée de sa partie impropre*, (c'est-à-dire est de capacité >0 au voisinage de chacun de ses points); on peut déjà s'en assurer lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini de points irréguliers restants.

(Reçu le 19 octobre 1949)

---

[4]) Voir le mémoire cité note [3]).

[5]) Voir M. BRELOT, Le problème de Dirichlet géodésique, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **228** (1949), p. 1790–1792.

[6]) M. V. KELDYCH en déduit en effet que son opérateur est dans Ω une fonction harmonique bornée qui tend vers $f(P)$ en tout point-frontière régulier P, ce qui l'identifie à H_f.

[7]) M. V. KELDYCH, On the solubility and the stability of Dirichlet problem, *Uspechi Mat. Nauk*, **8** (1941), p. 171–231 et spécialement p. 226. (Russian). L'auteur se place dans l'espace ordinaire mais le type de démonstration qui s'applique aux espaces supérieurs s'adapte au cas du plan.

[8]) Cette famille de fonctions sousharmoniques est celle considérée à l'origine par O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, **18** (1923), p. 42–54, avant qu'on ne considère la famille plus étendue des fonctions sousharmoniques sur Ω et qui, à la fontière ont seulement une lim sup majorée par f. Dans ce même mémoire, PERRON, cherchant des critères de résolubilité du problème classique, introduit sur les points-frontière une condition restrictive dont on peut voir seulement maintenant grâce à (K) qu'il s'agit exactement de la régularité.