Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes.

Par JEAN LERAY à Paris.

Dans son célèbre Mémoire [7], M. FRÉDÉRIC RIESZ a étendu la théorie de FREDHOLM aux équations linéaires des espaces de Banach; cette extension fut si utile qu'on désire l'adapter aux tendances actuelles: substituer les espaces topologiques aux espaces métriques et en particulier les espaces linéaires à voisinages convexes aux espaces de Banach. C'est cette adaptation que nous allons effectuer. L' "alternative de Fredholm" résultera d'un théorème de topologie, dont la preuve utilise essentiellement des applications non linéaires: le théorème de l'invariance du domaine; BROUWER l'établit pour les espaces euclidiens; il a été étendu aux espaces abstraits par le profond mathématicien polonais J. SCHAUDER, qui fut victime des massacres nazis; je l'ai récemment prouvé pour un type d'espaces englobant les espaces à voisinages convexes. Les autres théorèmes seront obtenus par les raisonnements-mêmes de F. RIESZ, tels que la connaissance de l'alternative de Fredholm permet de les simplifier; mais nous devrons justifier ces raisonnements par des lemmes autres que ceux de F. RIESZ.

I. ESPACE VECTORIEL À VOISINAGES CONVEXES.

1. Définitions. Par *espace vectoriel* nous entendrons espace vectoriel sur le corps A des nombres réels ou complexes, au sens de [1]. Soit X un tel espace. Le segment joignant les points x et y de X est l'ensemble des points $\alpha x+(1-\alpha)y$ ou $0\leqq\alpha\leqq 1$ (α réel); une partie de X est dite convexe quand elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points. Un *espace vectoriel à voisinages convexes* est un espace vectoriel X muni d'une topologie possédant les trois propriétés suivantes: *a)* cette topologie est *séparée* au sens de [2] (elle est même régulière, car X est uniforme); *b*) les applications $x+y$ et αx ($\alpha\in A$) sont *continues* par rapport à leurs arguments; *c)* le point 0 (et par suite tout point de X) possède *un système fondamental de voisinages convexes.*

Les *espaces euclidiens*, c'est-à-dire les produits d'un nombre fini de droites (réelles ou complexes selon que A est le corps des nombres réels ou complexes), constituent un exemple d'espaces vectoriels à voisinages convexes.

Notations. A est le corps des nombres réels ou complexes; X est un espace vectoriel à voisinages convexes. Soient B une partie de A; Y et Z des parties de X; BY est l'ensemble des points βy tels que $\beta \in B$, $y \in Y$; $Y \pm Z$ est l'ensemble des points $y \pm z$ tels que $y \in Y$, $z \in Z$. $\overline{Y}$ et $\dot{Y}$ désigneront l'adhérence et la frontière de Y. La négation de $\in$ est désignée par $\overline{\in}$.

2. Parties compactes. Lemme 2. 1. *Soient un voisinage V du point 0, une partie compacte K de X, et une suite $x_1, x_2, \ldots$ de points de K tels que $x_\nu \overline{\in} x_\mu + V$ si $\mu < \nu$; cette suite est finie.*

Preuve. Sinon la réunion des points $x_1, x_2, \ldots$ serait une partie fermée, non compacte de K, contrairement à [2], ch. I, § 10, proposition 4.

Lemme 2. 2. *Soient un espace topologique T, un espace compact K, une application continue $\varphi(t, k)$ de $T \times K$ dans X et une partie fermée F de X étrangère à $\varphi(t, K)$; le point t a un voisinage V tel que F soit étranger*[1] *à $\varphi(V, K)$.*

Preuve. Soit $k \in K$; il existe des voisinages $V(k)$ de t et $W(k)$ de k tels que F soit étranger à $\varphi(V(k), W(k))$; on recouvre K par un nombre fini de $W(k)$; V est l'intersection des $V(k)$ correspondants.

Lemme 2. 3. *Étant donnés une partie compacte K de X et un voisinage V du point 0, il existe un voisinage Δ du nombre 0 tel que $\Delta K \subset V$.*

Preuve. On applique le lemme 2. 2 à $\varphi = \alpha k$.

Lemme 2. 4. *Si F est une partie fermée et K une partie compacte de X, alors $F + K$ est fermé.*

Preuve. Soit $x \overline{\in} F + K$; F est étranger à $x - K$; d'après le lemme 2. 2, x a un voisinage V tel que F soit étranger à $V - K$; V est donc étranger à $F + K$.

3. Parties fermées et ouvertes. Lemme 3. 1. *Si B est un ensemble fermé de nombres $\neq 0$ et si F est un ensemble fermé de points de $X \neq 0$, alors BF est fermé.*

Preuve. Soit Γ la partie compacte de A que constituent le nombre 0 et les nombres β^{-1} tels que $\beta \in B$; soit $x \overline{\in} BF$; F est étranger à Γx; d'après le lemme 2. 2, x possède un voisinage V tel que F soit étranger à ΓV; V est donc étranger à BF.

Lemme 3. 2. *Si W est un voisinage du point 0 et Δ un voisinage du nombre 0, l'intersection des βW tels que $\beta \overline{\in} \Delta$ est un voisinage V du point 0.*

[1]) "étranger à" signifie "sans point commun avec".

Preuve. On applique le lemme 3. 1 aux complémentaires B et F de $\varDelta$ et W, supposés ouverts.

Le lemme suivant et évident:

Lemme 3. 3. *Si P est une partie quelconque de X et G une partie ouverte de X, alors $P+G$ est ouvert.*

4. Sous-espaces. Par *sous-espace* de X nous entendons sous-espace vectoriel: tout sous-espace de X contient le point 0 et est espace vectoriel à voisinages convexes.

Lemme 4. 1. (Adaptation de [7], Hilfssatz 1, 2, 3). *Supposons que le point 0 de X possède un voisinage ouvert V tel que $\overline{V}$ soit compact; soit Y un sous-espace fermé de X, différent de X; il existe $x \in \overline{V}$ tel que $x \overline{\in} Y+V$.*

Remarque. D'après le lemme 4. 3, *X est euclidien;* donc *tous ses sous-espaces sont fermés.*

Preuve. Soit $z \in X$ tel que $z \overline{\in} Y$; puisque Y est fermé, il existe un voisinage W du point 0 tel que $z \overline{\in} Y+W$; le lemme 2. 3 donne un nombre $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha \overline{V} \subset W$; donc $z \overline{\in} Y+\alpha V$; $\alpha^{-1} z \overline{\in} Y+V$;

$$X \neq Y+V. \tag{4. 1}$$

Supposons $\overline{V} \subset Y+V$; on aurait: $Y+\overline{V}=Y+V$; $Y+\overline{V}$ est fermé d'après le lemme 2. 4; $Y+V$ est ouvert d'après le lemme 3. 3; X est connexe; donc, contrairement à (4. 1), $X=Y+V$.

Lemme 4. 2. *Soit Y un sous-espace de X ayant une dimension finie, au sens de la théorie des espaces vectoriels:* [1], ch. II, § 3, n° 2; a) *Y est euclidien;* b) *Y est un sous-espace fermé de X.*

Preuve de a). Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_\omega)$ une base de Y; soit E un espace euclidien de dimension ω; en associant au point de E de coordonnées $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\omega)$ le point $\eta_1 y_1 + \ldots \eta_\omega y_\omega$ de Y; on définit une application φ linéaire, continue et biunivoque de E sur Y; il s'agit de prouver qu'elle est bicontinue, c'est-à-dire qu'elle applique toute partie ouverte de E sur une partie ouverte de Y. Soit U la boule $|\eta_1|^2 + \ldots |\eta_\omega|^2 < 1$; il suffit de prouver que $\varphi(U)$ est un voisinage du point 0 de Y. Or $\dot{U}$ est compact et $0 \overline{\in} \dot{U}$; donc $\varphi(\dot{U})$ est compact ([2], ch. I, § 10, th. 1) et $0 \overline{\in} \varphi(\dot{U})$; le point 0 de Y a donc un voisinage V convexe et étranger à $\varphi(\dot{U})$; $\overset{-1}{\varphi}(V)$ est convexe, contient le point 0 et est étranger à la sphère $\dot{U}$, dont le centre est ce point 0; donc $\overset{-1}{\varphi}(V) \subset U$; donc $V \subset \varphi(U)$: $\varphi(U)$ est bien un voisinage du point 0 de Y.

Preuve de b). Supposons qu'il existe $z \in \overline{Y}$ tel que $z \overline{\in} Y$; soit Z le sous-espace de X ayant pour base $(z, y_1, \ldots y_\omega)$; Y serait un sous-espace non fermé de Z, qui serait euclidien d'après a); c'est impossible.

Lemme 4. 3. *Tout sous-espace localement compact Y de X est fermé et euclidien.* (Voir un théorème plus général: [10] § 29.)

Nota. Y est localement compact quand le point 0 a, dans Y, un voisinage compact.

Preuve. Soit V un voisinage ouvert de 0 dans Y tel que $\overline{V}$ soit compact. Définissons par récurrence une suite de sous-espaces fermés et euclidiens Y_ν de Y: $Y_0 = 0$; si $Y_{\nu-1} \neq Y$, le lemme 4.1 donne un point $y_\nu \in \overline{V}$ tel que $y_\nu \overline{\in} Y_{\nu-1} + V$; Y_ν sera l'espace vectoriel de dimension ν contenant $Y_{\nu-1}$ et y_ν; d'après le lemme 4.2, Y_ν est un sous-espace fermé et euclidien de Y. On a $y_\nu \in \overline{V}$ et, si $\mu < \nu$, $y_\nu \overline{\in} y_\mu + V$; vu le lemme 2.1, la suite des Y_ν est donc finie: son dernier terme est Y; Y est donc sous-espace euclidien de X; Y est un sous-espace fermé de X d'après le lemme 4.2 b.

II. Endomorphisme de X complètement continu.

Adaptons comme suit la définition, due à F. Riesz, des applications complètement continues ([7] "vollstetig"):

5. Définition. *Soit $v(x)$ un endomorphisme de X, c'est-à-dire une application linéaire de X en lui-même; $v(x)$ est dite complètement continue si elle est continue et s'il existe un voisinage que $v(x)$ applique dans un compact: on a*

$$v(\overline{W}) \subset K, \tag{5.1}$$

W étant un voisinage ouvert du point 0 et K un compact.

Notations. Étant donné un endomorphisme de X complètement continu, $v(x)$, nous étudierons l'endomorphisme, dépendant du paramètre réel ou complexe $\lambda \in A$,

$$u(x) = \lambda x - v(x). \tag{5.2}$$

Nous noterons parfois cet endomorphisme: $u = \lambda - v$. Nous poserons $u^2(x) = u(u(x)), \ldots, u^{\nu+1}(x) = u(u^\nu(x)), \ldots$; $\overset{-\nu}{u}(y)$ sera l'ensemble des points x tels que $u^\nu(x) = y$.

Nos conclusions permettront de discuter, quand $\lambda \neq 0$, *l'équation* d'inconnue $x \in X$, de paramètres $\lambda \in A$, $y \in X$: $u(x) = y$.

Lemme 5.1. *Si Y est un sous-espace fermé de X que v applique en lui-même, la restriction de v à Y est complètement continue.*

Preuve: $v(Y \cap \overline{W}) \subset Y \cap K$; $Y \cap K$ est compact.

6. $u(X)$ est fermé. Lemme 6.1. *Si F est une partie fermée de $\overline{W}$, $u(F)$ est fermé.* (Voir un théorème plus général: [5] n⁰ 91, théorème 29 bis.)

Preuve. Soit $y \overline{\in} u(F)$; il s'agit de construire un voisinage de y étranger à $u(F)$. Soit V un voisinage fermé de y, étranger au compact $u(F \cap \lambda^{-1}(y + K))$; soit $F_1 = F \cap \overset{-1}{u}(V)$; il suffit de construire un voisinage V_1 de y étranger à $u(F_1)$. Or F_1 est fermé et étranger à $\lambda^{-1}(y + K)$; $v(F_1) \subset K$ d'après (5.1); donc

$y \bar{\in} \lambda F_1 - K$ et, vu (5. 2), $u(F_1) \subset \lambda F_1 - K$; d'après le lemme 2. 4, $\lambda F_1 - K$ est fermé; V_1 sera son complémentaire.

Lemme 6. 2. ([7], Satz 5) *$u(X)$ est un sous-espace fermé de X.*

Preuve. $F_1 = \overset{-1}{u} u(\overline{W}) = \overline{W} + \overset{-1}{u}(0)$ est fermé, vu le lemme 6. 1; $O_1 = \overset{-1}{u} u(W) = W + \overset{-1}{u}(0)$ est ouvert, vu le lemme 3. 3. Soit F_2 le complémentaire de O_1 dans F_1; F_2 est fermé; $\dot{F}_1 \subset F_2$. Soit x un point étranger à F_1; le point 0 est intérieur à F_1; le segment joignant 0 à x, étant connexe, contient au moins un point de $\dot{F}_1$: en notant B l'ensemble des nombres réels $\beta \geqq 1$, nous avons $x \in B\dot{F}_1 \subset BF_2$; d'où $X = F_1 \cup BF_2$ et par suite

$$u(X) = u(F_1) \cup Bu(F_2) \tag{6. 1}$$

$u(F_1) = u(\overline{W})$ est fermé d'après le lemme 6. 1; $u(F_2)$ est le complémentaire de $u(W)$ dans $u(\overline{W})$; donc $u(F_2) = u(F_3)$, F_3 étant le complémentaire de $\overline{W} \cap O_1$ dans $\overline{W}$; $u(F_3)$ est fermé d'après le lemme 6. 1; $u(F_2)$ est donc fermé; $0 \bar{\in} u(F_2)$ car F_2 est étranger à $\overset{-1}{u}(0)$; donc, vu le lemme 3. 1, $Bu(F_2)$ est fermé. De (6. 1) résulte donc que $u(X)$ est fermé.

III. Valeurs propres.

7. L'alternative de Fredholm. Définition. Les *valeurs propres* de $v(x)$ sont les nombres λ tels que l'équation $u(x) = 0$, c'est-à-dire $\lambda x = v(x)$ possède des solutions $x \neq 0$.

Théorème 7. 1. ([7], Satz 7) *$u(x)$ est une application bicontinue de X sur lui-même, quand λ diffère de 0 et des valeurs propres de $v(x)$.*

Ce théorème résulte de l'extension du théorème de l'invariance du domaine aux espaces convexoïdes ([5], n⁰ 95 et 96; théorème 36 et corollaire 36) ou, plus directement, aux espaces à voisinages convexes: [6].

Remarque. Le théorème 7. 1 implique *l'alternative de Fredholm:* Supposons $\lambda \neq 0$; ou bien l'équation $u(x) = 0$ possède une solution $x \neq 0$; ou bien l'équation $u(x) = y$ possède une solution x unique, quel que soit $y \in X$.

8. L'ensemble des valeurs propres. Théorème 8 1. ([7], Satz 12) *Les valeurs propres de $v(x)$ sont en nombre fini ou constituent une suite ayant pour limite 0.*

Preuve (empruntée à [7]). Soit une suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ de valeurs propres distinctes, étrangères à un voisinage Δ du point 0; soit $x_\nu \neq 0$ tel que

$$\lambda_\nu x_\nu = v(x_\nu). \tag{8. 1}$$

Si x_ν dépendait linéairement de $x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}$, on aurait

$$\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_{\nu-1} x_{\nu-1} = x_\nu;$$

d'où, vu (8. 1), en transformant les deux membres par $\lambda_\nu - v$:

$$\alpha_1(\lambda_\nu - \lambda_1) x_1 + \ldots \alpha_{\nu-1}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) x_{\nu-1} = 0;$$

il existerait donc $\mu < \nu$ tel que x_μ dépende linéairement de $x_1, \dots x_{\mu-1}$; d'où, par récurrence, $x_1 = 0$; or $x_1 \neq 0$; donc $x_1, x_2, \dots x_\nu$ sont linéairement indépendants. Soient X_ν le sous-espace qu'ils engendrent; X_ν est fermé et euclidien (lemme 4. 2);

$$X_\nu \neq X_{\nu+1}; \; X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_\nu \subset X_{\nu+1} \subset \dots;$$

d'après le lemme 4. 1 il existe y_ν tel que

$$(8.2) \quad y_\nu \in X_\nu \cap \overline{W}, \qquad (8.3) \quad y_\nu \overline{\in} X_{\nu-1} + W;$$

de (8. 1) et de la définition de X_ν résulte, puisque $y_\nu \in X_\nu$,

$$(8.4) \qquad \lambda_\nu y_\nu - v(y_\nu) \in X_{\nu-1}; \; v(y_\mu) \in X_{\nu-1} \quad \text{pour } \mu < \nu;$$

de (8. 3) et (8. 4) résulte

$$\lambda_\nu y_\nu \overline{\in} \lambda_\nu y_\nu - v(y_\nu) + v(y_\mu) + \lambda_\nu W$$

c'est-à-dire $v(y_\nu) \overline{\in} v(y_\mu) + \lambda_\nu W$. D'après le lemme 3. 2, le point 0 a un voisinage V tel que $V \subset \lambda_\nu W$; donc $v(y_\nu) \overline{\in} v(y_\mu) + V$.

D'autre part, il résulte de (8. 2) et (5. 1) que $v(y_\nu) \in K$. Donc, en vertu du lemme 2. 1, la suite λ_ν doit être finie.

IV. VECTEURS PROPRES ET VECTEURS PRINCIPAUX.

Donnons à λ une valeur propre de v autre que 0.

9. Les sous-espaces $\overset{-\nu}{u}(0)$ et $u^\nu(X)$. Lemme 9. 1. ([7], Satz 1) $\overset{-1}{u}(0)$ *est un sous-espace fermé et euclidien; $\overset{-1}{u}(0) \cap \overline{W}$ est dans ce sous espace un voisinage compact du point* 0.

Preuve. $Y = \overset{-1}{u}(0)$ est fermé car $u(x)$ est continu. D'après (5. 2), $x = \lambda^{-1} v(x)$ sur Y; d'où $Y \cap \overline{W} = Y \cap \lambda^{-1} v(W)$; vu (5. 1), $Y \cap \overline{W}$ est donc un voisinage compact du point 0 de Y; d'après le lemme 4. 3, Y est donc euclidien.

Lemme 9. 2. ([7], Satz 1') $\overset{-\nu}{u}(0)$ *est est un sous-espace fermé et euclidien; $\overset{-\nu}{u}(0) \cap \overline{W}$ est dans ce sous-espace un voisinage compact du point* 0.

Preuve. On peut dans le lemme 9. 1 remplacer u par u^ν car $\lambda^\nu - u^\nu$, étant un polynome en v sans terme constant, est complètement continu.

Lemme 9. 3. ([7], Satz 2) *Il existe un entier σ tel que*

$$\overset{-1}{u}(0) \subset \overset{-2}{u}(0) \subset \dots \subset \overset{-\sigma}{u}(0) = \dots = \overset{-\tau}{u}(0) = \dots \quad (\sigma \leqq \tau).$$

Preuve (empruntée à [7]). Soit $\nu > 1$; on a $\overset{-\nu+1}{u}(0) \subset \overset{-\nu}{u}(0)$ car $u^{\nu-1}(x) = 0$ entraîne $u^\nu(x) = 0$. Supposons

$$(9.1) \qquad \overset{-\nu+1}{u}(0) \neq \overset{-\nu}{u}(0);$$

il existe d'après les lemmes 4. 1 et 9. 2 un point x_ν tel que

$$(9.2) \quad x_\nu \in \overset{-\nu}{u}(0) \cap \overline{W}; \qquad (9.3) \quad x_\nu \overline{\in} \overset{-\nu+1}{u}(0) + W.$$

D'après (9. 2), $u^\nu(x_\nu)=0$; donc

(9. 4) $$u(x_\nu)\in \overset{-\nu+1}{u}(0).$$

Pour $\mu<\nu$ il résulte de $u^\mu(x_\mu)=0$ que

(9. 5) $$x_\mu\in \overset{-\nu+1}{u}(0),\quad u(x_\mu)\in \overset{-\nu+1}{u}(0).$$

De (9. 3), (9. 4) et (9. 5) résulte

$$\lambda x_\nu \,\bar{\in}\, u(x_\nu)+\lambda x_\mu - u(x_\mu)+\lambda W,$$

c'est-à-dire, vu (5. 2), $v(x_\nu)\,\bar{\in}\, v(x_\mu)+\lambda W$.

D'autre part, d'après (9. 2) et (5. 1), $v(x_\nu)\in K$.

En vertu du lemme 2. 1, la suite des ν vérifiant (9. 1) est donc finie; σ est le dernier terme de cette suite.

Lemme 9. 4 $\overset{-\nu}{u}(0)\cap u^\sigma(X)=0$, *quel que soit* $\nu>0$.

Preuve (empruntée à [7]): Soit $x\in\overset{-\nu}{u}(0)\cap u^\sigma(X)$: il existe $y\in X$ tel que $x=u^\sigma(y)$; $u^\nu(x)=0$ implique $u^{\nu+\sigma}(y)=0$, c'est-à-dire $y\in \overset{\nu-\sigma}{u}(0)=\overset{-\sigma}{u}(0)$ (lemme 9. 3); d'où $u^\sigma(y)=0$, c'est-à-dire $x=0$.

Lemme 9. 5. ([7], Satz 6, 11) $u^\nu(X)$ *est un sous-espace fermé;*

$$X\supset u(X)\supset u^2(X)\supset\ldots\supset u^\sigma(X)=\ldots=u^\tau(X)=\ldots\qquad(\sigma\leqq\tau);$$

u est une application bicontinue de $u^\sigma(X)$ *sur lui-même.*

Preuve. $u(X)$ est fermé (lemme 6. 2). Soit $\nu>0$; supposons prouvé que $u^\nu(X)$ est fermé; le restriction de v à $u^\nu(X)$ applique $u^\nu(X)$ en lui-même car $vu^\nu=u^\nu v$; elle est complètement continue (lemme 5. 1); $u^{\nu+1}(X)$ est donc fermé (lemme 6. 2). La restriction de v à $u^\sigma(X)$ n'a pas λ pour valeur propre (lemme 9. 4 où $\nu=1$); donc (théorème 7. 1) la restriction de u à $u^\sigma(X)$ est une application bicontinue de $u^\sigma(X)$ sur lui-même; en particulier $u^{\sigma+1}(X)=u^\sigma(X)$.

Lemme 9. 6 ([7], Satz 8). $X=\overset{-\sigma}{u}(0)+u^\sigma(X)$, *cette somme étant directe.*

Preuve (empruntée à [7]) Soit $x\in X$: d'après le lemme 9. 5 il existe $y\in X$ tel que $u^{2\sigma}(y)=u^\sigma(x)$; d'où $u^\sigma(x-u^\sigma(y))=0$, c'est-à-dire $x\in\overset{-\sigma}{u}(0)+u^\sigma(X)$. Cette somme est directe d'après le lemme 9. 4, où l'on fait $\nu=\sigma$.

10. Vecteurs propres et principaux. Soit λ une valeur propre de v; les points x de X tels que $u(x)=0$ sont nommés *vecteurs propres de v correspondant à la valeur propre* λ; les points x de X auxquels on peut associer un entier $\nu>0$ tel que $u^\nu(x)=0$ ont été nommés par GOURSAT *vecteurs principaux de v correspondant à la valeur propre* λ.

Soit $v(x)$ un endomorphisme d'un espace euclidien E; le déterminant de la matrice de l'endomorphisme $\varrho x-v(x)$ $(\varrho\in A)$, par rapport à une base de E, est un polynome $\chi(\varrho)$, indépendant du choix de cette base; on nomme $\chi(\varrho)$ *fonction caractéristique* de v. On a ([9] chapitre XV, § 112):

(10. 1) $$\chi(v)=0.$$

Lemme 10. 1. *Soit u un endomorphisme nilpotent*[2]) *d'un espace euclidien E de dimension δ; sa fonction caractéristique est $\chi(\varrho)=\varrho^\delta$.*

Preuve. Si $\chi(\varrho)=0$, il existe $x\in E$ tel que $\varrho x=u(x)$, $x\neq 0$; d'où, puisque $u^\nu=0$, $\varrho^\nu x=0$, c'est-à-dire $\varrho=0$; $\chi(\varrho)$ se réduit donc à son terme de plus haut degré, qui est évidemment ϱ^δ.

Le lemme 10. 1 a pour conséquence évidente le lemme que voici:

Lemme 10. 2. *Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension δ; si $u=\lambda-v$ est nilpotent, la fonction caractéristique de v est $\chi(\varrho)=(\varrho-\lambda)^\delta$.*

Le lemme 10. 2 permet de résumer et compléter comme suit les lemmes du n⁰ 9:

Théorème 10. 1. ([7], Satz 1', 2, 6, 8, 9, 10, 11, 13) *Soit λ une valeur propre de v autre que 0.*

a) *L'ensemble des vecteurs principaux de v qui correspondent à λ est un sous-espace fermé et euclidien Y de X. La restriction v_Y de v à Y est un endomorphisme de Y; la fonction caractéristique de v_Y est*

(10. 2) $$\chi(\varrho)=(\varrho-\lambda)^\delta \quad où \quad \delta=\dim Y;$$

sa seule valeur propre est λ; ses vecteurs principaux et propres sont ceux de v qui correspondent à λ.

b) *Il existe un sous-espace fermé Z de X tel que $v(Z)\subset Z$, $X=Y+Z$, cette somme étant directe. La restriction v_Z de v à Z est un endomorphisme complètement continu de Z; les valeurs propres de v_Z sont les valeurs propres de v autres que λ; à ces valeurs correspondent, pour v_Z et v, les mêmes vecteurs principaux et propres.*

Remarque. On a, vu (10. 1) et (10. 2)

(10. 3) $$u^\delta(Y)=0.$$

Preuve de a). Le lemme 9. 3 prouve que $Y=\overset{-\sigma}{u}(0)$; donc, vu le lemme 9. 2, Y est un sous-espace fermé et euclidien. Soit $u_Y=\lambda-v_Y$; $u_Y^\sigma=0$; d'où, vu le lemme 10. 2, la formule (10. 2), qui prouve que la seule valeur propre de v_Y est λ; les vecteurs principaux et propres correspondant à λ sont les mêmes pour v_Y et v, puisque $\overset{-\nu}{u}(0)\subset Y$ quel que soit $\nu>0$.

Preuve de b). Soit $Z=u^\sigma(X)$; les lemmes 9. 5 et 9. 6 prouvent que Z est fermé et que $X=Y+Z$ (somme directe). Le lemme 9. 5 prouve en outre que λ n'est pas valeur propre de v_Z. Soit $w(x)=\varrho x-v(x)$, où $\varrho\neq\lambda$ posons $x=y+z$, où $y\in Y$, $z\in Z$; l'équation $w^\nu(x)=0$ implique $w^\nu(y)=0$ donc, vu a), $y=0$: les vecteurs principaux et propres, ne correspondant pas à λ, de v et v_Z sont donc les mêmes.

---

[2]) u est nilpotent quand il existe un entier $\nu>0$ tel que $u^\nu=0$.

V. ENDOMORPHISMES TRANSPOSÉS.

11. Notations. X et X^* seront deux espaces vectoriels à voisinages convexes; $\langle x, x^* \rangle$ sera une *application bilinéaire* de leur produit $X \times X^*$ dans A. Nous dirons que la partie Y de X est orthogonale à la partie Z^* de X^* quand $\langle y, z^* \rangle = 0$ quels que soient $y \in Y$, $z^* \in Z^*$. Nous supposerons que 0 *est le seul élément de* X *(de* X^**) orthogonal à* X^* *(à* X*)*: X pourra être identifié à un sous-espace du dual ([1], chapitre II, § 4) de X^* et vice-versa; les sous-espaces Y et Y^* de X et X^* seront dits *duals* quand Y s'identifie au dual de Y^* et Y^* au dual de Y.

v et ${}^t v$ seront deux endomorphismes de X et X^* *complètement continus et transposés l'un de l'autre:* $\langle v(x), x^* \rangle = \langle x, {}^t v(x^*) \rangle$ quels que soient $x \in X$ et $x^* \in X^*$.

Soit $\lambda \in A$, $\lambda \neq 0$; le théorème 10. 1 définit des sous-espaces Y et Z de X, si λ est valeur propre; sinon, nous définirons: $Y = 0$, $X = Z$. À ${}^t v$ et λ sont attachés de même deux sous-espaces Y^* et Z^* de X^*.

Lemme 11. 1. *Y et Z^* (Z et Y^*) sont orthogonaux.*

Preuve. $Y = 0$, si λ n'est pas valeur propre de v. Sinon : $u^\delta(Y) = 0$, vu (10. 3); $Z^* = {}^t u(Z^*) = {}^t u^\delta(Z^*)$ vu le théorème 7. 1 ou 10. 1 b; par suite, si $y \in Y$ et $z^* \in Z^*$,

$$\langle y, z^* \rangle = \langle y, {}^t u^\delta(x^*) \rangle = \langle u^\delta(y), x^* \rangle = \langle 0, x^* \rangle = 0.$$

Lemme 11. 2. *Y et Y^* sont duals.*

Preuve. Soit $y \in Y$ orthogonal à Y^*; d'après le lemme 11. 1, y est orthogonal à $Y^* + Z^* = X^*$; donc $y = 0$. Par suite Y est un sous-espace du dual de Y^*; donc, vu [1], ch. II, § 3 proposition 6 et § 4, proposition 6: $\dim Y \leq \dim Y^*$; Y et Y^* sont duals, si l'égalité est réalisée. Or c'est le cas, car, en intervertissant Y et Y^*, on obtient: $\dim Y^* \leq \dim Y$.

Lemme 11. 3. *$u^\nu(Y)$ et ${}^t u^\nu(Y^*)$ sont duals* ($\nu > 0$).

Preuve. [1], chapitre II, § 4, n° 9, th. 4.

Lemme 11. 4. *$\overset{-\nu}{u}(0)$ et ${}^t \overset{-\nu}{u}(0)$ ont même dimension* ($\nu > 0$).

Preuve. On a ([1], ch. II, § 3, proposition 10) : $\dim \overset{-\nu}{u}(0) + \dim u^\nu(Y) = \dim Y$; $\dim {}^t \overset{-\nu}{u}(0) + \dim {}^t u^\nu(Y^*) = \dim Y^*$; or Y et $u^\nu(Y)$ ont mêmes dimensions que leurs duals Y^* et ${}^t u^\nu(Y^*)$: ([1], ch. II, § 4, proposition 6).

Lemme 11. 5. *$u(X)$ est l'ensemble des points de X orthogonaux à* ${}^t \overset{-1}{u}(0)$.

Preuve. D'après le théorème 7. 1 ou 10. 1, $u(Z) = Z$ et $u(X) = u(Y) + Z$; $u(Y)$ est l'ensemble des points de Y orthogonaux à ${}^t \overset{-1}{u}(0)$ ([1], ch. II, § 4, th. 3); Z est orthogonal à ${}^t \overset{-1}{u}(0)$ (lemme 11. 1).

Ces cinq lemmes prouvent le théorème suivant:

Théorème 11. 1. *Les valeurs propres non nulles des deux endomorphismes v et ${}^t v$ sont les mêmes. Les vecteurs principaux de v et ${}^t v$ correspondant à l'une de ces valeurs propres constituent deux sous-espaces de X et X^*, duals. Les vecteurs propres de v et ${}^t v$ correspondant à l'une de ces valeurs propres constituent deux sous-espaces de X et X^* ayant même dimension. Pour que l'équation d'inconnue x*

$$\lambda x - v(x) = x' \qquad (\lambda \neq 0)$$

ait au moins une solution, il faut et il suffit que x' soit orthogonal aux vecteurs propres de ${}^t v$ qui correspondent à λ.

12. Problème. *Soit ${}^t v$ le transposé, dans le dual topologique de X, d'un endomorphisme complètement continu v de X; pour que ${}^t v$ soit complètement continu, est il nécessaire et suffisant que v le soit?* J. Schauder [8] l'a prouvé quand X est un espace de Banach.

Nota. Le dual topologique de X est l'espace vectoriel à voisinages convexes que constituent les applications linéaires et continues de X dans A. Par définition 0 est le seul point du dual topologique de X orthogonal à X; 0 est le seul point de X orthogonal au dual topologique de X (conséquence aisée de [1], ch. II, § 3, th. 2). Si la réponse à la question posée est affirmative, le théorème 11. 1 peut être appliqué, quels que soient X et v, au dual topologique X^* de X et au transposé ${}^t v$ de v dans X^*.

Bibliographie.

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* Livre II, ch. II: *Algèbre linéaire* (Paris, 1947).

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* Livre III, ch. I: *Structures topologiqus* (Paris, 1940).

[3] J. Leray et J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, *Annales de l'École Normale Supérieure,* **51** (1934). p. 45–78.

[4] J. Leray, Topologie des espaces abstraits de Banach, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **200** (1935), p. 1082—1084.

[5] J. Leray, Sur les équations et les transformations, *Journal de Math.,* **24** (1945), p. 201—248.

[6] J. Leray, Théorie des équations dans les espaces vectoriels à voisinages convexes (à paraître; professé au Collège de France en 1948–49; étend [3] et [4] aux espaces vectoriels à voisinages convexes).

[7] F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.,* **41** (1918), p. 71—98.

[8] J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, *Studia Math.,* **2** (1930), p. 183—196.

[9] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra,* vol. 2 (Berlin, 1940).

[10] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris, 1940).

(Reçu le 29 août 1949)