# Méthodes de sommation des séries de Fourier. I.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

## § 1. Matrices de type $F$.

Étant donnée une matrice triangulaire infinie

$$\Lambda=(\lambda_{nk}) \qquad (n=0,1,\ldots;\ k=0,1,\ldots,n)$$

de nombres réels ou complexes dont $\lambda_{n0}=1$, attachons à chaque fonction périodique $f(x)$ de période $2\pi$, intégrable[1]) et ayant la série de Fourier

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x), \qquad c_k(x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

les sommes

$$\sigma_n(x)=\sigma_n(\Lambda,f;\,x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}c_k(x).$$

Nous dirons que *la matrice $\Lambda$ est de type $F$ lorsque les sommes $\sigma_n(x)$ tendent vers $f(x)$ en tout point de Lebesgue de $f(x)$ et cela uniformément dans l'intérieur de tout intervalle où $f(x)$ est continue.*

Le prototype d'une telle matrice est celle qui correspond à la méthode classique de FEJÉR de sommer la série de Fourier par le procédé de la moyenne arithmétique: $\Lambda=\left(1-\dfrac{k}{n+1}\right)$. Il en est de même pour toutes les matrices de CESÀRO d'ordre $r>0$, $\Lambda=(A^{(r)}_{n-k}/A^{(r)}_n)$ où $A^{(r)}_m=\binom{m+r}{m}$.

En généralisant ces résultats classiques, HILLE et TAMARKIN[2]) ont montré que toute matrice de NÖRLUND $\Lambda=(P_{n-k}/P_n)$, formée à partir d'une suite $\{p_k\}$ de nombres réels ou complexes en posant $P_m=\sum_{h=0}^{m}p_h$, est de type $F$, à condition qu'il existe une constante $C$ telle que

---

[1]) Dans un intervalle de période et dans le sens de Lebesgue.

[2]) E. HILLE—J. D. TAMARKIN, On the summability of Fourier series. I, *Transactions American Math. Society*, 34 (1932), p. 757-783.

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & \sum_0^n |p_k| \\ (2) & n|p_n| \\ (3) & \sum_1^n k|p_k-p_{k-1}| \\ (4) & \sum_1^n |P_k|/k \end{array}\right\} < C|P_n|.$$

Ces conditions sont d'ailleurs seulement suffisantes et non pas nécessaires.

Les conditions (1)—(3) sont vérifiées en particulier lorsque $p_n > p_{n+1} > 0$ $(n=0, 1, \ldots)$ (ce qui est le cas par exemple pour les matrices de CESÀRO d'ordre $r$ tel que $0 < r < 1$ où l'on a $p_k = A_k^{(r-1)}$). La condition (4) se trouve alors même nécessaire pour que $\Lambda$ soit du type $F$.

En généralisant ce dernier résultat, NIKOLSKY[3]) vient de montrer que, $\Lambda = (\lambda_{nk})$ étant une matrice de nombres réels tels que la suite $\lambda_{n0}, \lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn}, 0$ est *convexe* ou *concave* pour toute valeur fixée de $n$, les conditions

(5) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

(6) $$|\lambda_{nk}| < C, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{nk}}{n-k+1}\right| < C$$

sont suffisantes et nécessaires pour que $\Lambda$ soit de type $F$.[4])

Malgré sa généralité, le theorème de NIKOLSKY n'embrasse évidemment pas celui de HILLE et TAMARKIN, les matrices envisagées par ces auteurs ne satisfaisant pas en général à l'hypothèse d'être convexes.

Voici un théorème embrassant, en tant que conditions suffisantes, tous ces théorèmes comme cas particuliers:

Théorème. *Pour que la matrice $\Lambda = (\lambda_{nk})$ soit de type F, il suffit qu'on ait*

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

*et*

(B) $$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i}\right)|\Delta_{nk}^2| < C\,^{5})$$

*où*

$$\Delta_{nk}^2 = \lambda_{nk} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2} \quad (k=0, \ldots, n-1)\,; \quad \lambda_{n0}=1,\ \lambda_{n,n+1}=0.$$

---

[3]) S. M. NIKOLSKY, Sur des méthodes linéaires de sommation des séries de Fourier, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, série math., **12** (1948), p. 259—278 (en russe).

[4]) La nécessité résulte d'une part du fait qu'une suite convergente d'opérations linéaires est bornée dans la sphère unité de l'espace fonctionnel en question, et d'autre part de ce que les fonctions $\cos nx$ et $\nu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} [\cos kx - \cos(2n+2-k)x]/(n-k+1)$ restent inférieures en module à une même constante.

[5]) On désignera par $C, C_1, \ldots$ des constantes ne dépendant pas de $n$.

La condition (B) est évidemment équivalente à

$$\text{(B}')\qquad \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\log\frac{n}{n-k}\,|\Delta^2_{nk}|<C.$$

Dans le cas où, pour chaque $n$ fixé, les $\Delta^2_{nk}$ sont de même signe, le premier membre de (B) se réduit par deux transformations abéliennes à

$$\left|(\lambda_{n0}-\lambda_{nn})-\sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}/(n-k+1)\right|;$$

la condition (B) est donc das ce cas une conséquence de celle (6) de NIKOLSKY.

Dans le cas des matrices de NÖRLUND nos conditions prennent la forme

$$\text{(A}_N)\qquad \lim_{n\to\infty}p_{n-m}/P_n=0\qquad (m=0,1,\ldots),$$

$$\text{(B}_N)\qquad \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=m}^{n}\frac{m}{i}\right)|p_m-p_{m-1}|<C|P_n|.$$

Elles sont moins restrictives que celles de HILLE et TAMARKIN citées plus haut, ($A_N$) étant une conséquence de (2), (3) et ($B_N$) une conséquence de (3), (4). En effet, (3) entraîne que

$$\sum_{n-m}^{n}|p_k-p_{k-1}|\leqq\sum_{k=n-m}^{n}\frac{k}{n-m}|p_k-p_{k-1}|<\frac{C}{n-m}|P_n|,$$

donc $|p_{n-m}-p_{n-m-1}|/|P_n|\to 0$ $(n\to\infty)$, et cela pour $m=0,1,\ldots$. Comme $p_n/P_n\to 0$ par (2), il en résulte de proche en proche que $p_{n-1}/P_n\to 0$, $p_{n-2}/P_n\to 0$ etc. D'autre part, (3) et (4) entraînent que

$$\sum_{m=1}^{i}m|p_m-p_{m-1}|<C|P_i|,\qquad \sum_{i=1}^{n}C|P_i|/i<C^2|P_n|,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{i}m|p_m-p_{m-1}|\right)\Big/ i<C^2|P_n|,$$

ce qui est équivalent à ($B_N$).

Pour la matrice $\Lambda=\big((P_n-P_{k-1})/P_n\big)$ où $P_n=\sum_0^n p_k$, $P_{-1}=0$, qu'on appelle aussi matrice "progressive" pour la distinguer de celle "rétrograde" de NÖRLUND, nos conditions prennent la forme

$$\text{(A}_P)\qquad \lim|P_n|=\infty,$$

$$\text{(B}_P)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n}\frac{n-k}{i}\right)|p_k-p_{k+1}|<C|P_n|.$$

Comme

$$\sum_{i=n-k}^{n}\frac{n-k}{i}\leqq k+1,$$

($B_P$) est vérifiée en particulier si l'on a (3).[6])

[6]) Le fait que les conditions ($A_P$), (3) et (2) assurent que la matrice "progressive" $\Lambda$ soit du type $F$, est connu; cf. E. HILLE, Summation of Fourier series, *Bulletin American Math. Society*, **38** (1932), p. 505—528, en particulier p. 513.

Observons enfin que si $\lambda_{nk}=\lambda\left(\frac{k}{n+1}\right)$ où $\lambda(u)$ $(0\leqq u\leqq 1)$ est une fonction absolument continue telle que $\lambda(0)=1$, $\lambda(1)=0$, la condition (B) se réduit à ce que l'intégrale

$$\int_0^1 (1-u)\log\frac{1}{1-u}\;|d\lambda'(u)|$$

existe.[7])

## § 2. Quelques conséquences immédiates des hypothèses (A), (B).

Désignons par $\nu$, dans tout ce qui suit, le plus grand entier compris dans $n/2$. Au lieu de $\lambda_{nk}$, $\Delta_{nk}=\lambda_{nk}-\lambda_{n,k+1}$, $\Delta^2_{nk}=\Delta_{nk}-\Delta_{n,k+1}$ nous écrirons, pour abréger, aussi $\lambda_k$, $\Delta_k$ et $\Delta^2_k$.

Observons d'abord que

$$(n-k)\sum_{n-k}^{n}\frac{1}{i}\geqq(n-k)\frac{k+1}{n}>\begin{cases}\frac{1}{2}(k+1) & \text{pour } 0\leqq k\leqq\nu,\\ \frac{1}{2}(n-k) & \text{pour } \nu\leqq k\leqq n;\end{cases}$$

donc l'hypothèse (B) entraîne

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)|\Delta^2_k|<2C,\quad \sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)|\Delta^2_k|<2C. \tag{7}$$

On obtient par deux transformations abéliennes:

$$\lambda_\nu=\lambda_0-(\lambda_0-\lambda_\nu)=1-\sum_{k=0}^{\nu-1}\Delta_k=1-\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\Delta^2_k-\nu\Delta_\nu, \tag{8}$$

ou encore

$$\lambda_\nu=\lambda_\nu-\lambda_{n+1}=\sum_{k=\nu}^{n}\Delta_k=(n-\nu+1)\Delta_\nu-\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\Delta^2_k. \tag{9}$$

On déduit de (8) et (9) la relation

$$\lambda_\nu=\frac{n-\nu+1}{n+1}\lambda_\nu+\frac{\nu}{n+1}\lambda_\nu=$$

$$=\frac{n-\nu+1}{n+1}-\frac{n-\nu+1}{n+1}\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\Delta^2_k-\frac{\nu}{n+1}\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\Delta^2_k.$$

Grâce à (7), cela donne

$$|\lambda_\nu|\leqq 1+4C=C_1. \tag{10}$$

---

[7]) Nous avons étudié des procédés de sommation engendrées par de telles fonctions "sommatoires" $\lambda(u)$ (et même par d'autres plus générales) dans un Mémoire précédent: Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Hungarica Acta Math.*, **1**, n° 3 (1948), p. 14–52. Nous avons déterminé les constantes de Lebesgue et les constantes d'approximation correspondantes.

Écrivons (8) sous la forme

$$\nu \Delta_\nu = 1 - \lambda_\nu - \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \Delta_k^2.$$

Il en résulte, par (7) et (10), que

$$|\nu \Delta_\nu| \leqq 1 + C_1 + 2C = C_2. \tag{11}$$

Montrons enfin que

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_{nk}^2| \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad n \to \infty. \tag{12}$$

Pour le voir, commençons par observer que, quel que soit l'entier $r \geqq 1$, on peut déterminer $n_0 = n_0(r)$ de façon qu'on ait

$$\sum_m^n \frac{1}{i} > r \qquad \text{pour tout } n \geqq n_0 \text{ et pour tout } m \leqq r.$$

On a alors pour $n \geqq n_0$:

$$\Sigma_n \leqq \sum_{k=0}^{r-1} |\Delta_k^2| + \frac{1}{r} \sum_{k=r}^{\nu-1} (k+1) |\Delta_k^2| +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{k=\nu}^{n-r} (n-k) |\Delta_k^2| + \frac{1}{r} \sum_{k=n-r+1}^{n-1} \left( \sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) |\Delta_k^2|.$$

En vertu de l'hypothèse (B) et de ses conséquences (7), il en vient que

$$\Sigma_n \leqq \sum_{k=0}^{r-1} |\Delta_k^2| + \frac{5C}{r} \qquad (n \geqq n_0).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, on détermine $r$ de façon que $5C/r < \varepsilon/2$; grâce à l'hypothèse (A), on peut déterminer ensuite $n_1$ ($\geqq n_0$) de façon que pour $n \geqq n_1$ et pour $k = 0, 1, \ldots, r-1$ on ait $|\Delta_{nk}^2| < \varepsilon/2r$. On aura alors $\Sigma_n < \varepsilon$, ce qui prouve (12).

## § 3. Démonstration du théorème.

Partons de la formule

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_n(t)\, \varphi_x(t)\, dt \tag{13}$$

où

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad \text{et} \quad K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} \cos kt.$$

On obtient par deux transformations abéliennes:

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(t) \Delta_k^2 + M_n(t) \Delta_n,$$

ou encore

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k(t) \Delta_k^2 + \sum_{k=\nu}^{n-1} N_k(t) \Delta_k^2 + M_n(t) \Delta_\nu \tag{14}$$

où

$$M_k(t)=\frac{\sin^2(k+1)t/2}{2\sin^2 t/2},\quad N_k(t)=N_{nk}(t)=M_k(t)-M_n(t).$$

Envisageons un intervalle $(\delta,\pi)$, $\delta>0$. Les fonctions $|M_k(t)|$ et $|N_k(t)|$ y restant inférieures à $\omega(\delta)=\sin^{-2}\delta/2$, on a

$$|K_n(t)|\leqq\omega(\delta)\left(\sum_{k=0}^{n-1}|\varDelta_k^2|+|\varDelta_\nu|\right)\qquad(\delta\leqq t\leqq\pi),$$

d'où il s'ensuit par (11) et (12) que

(15) $$m_n(\delta)=\max_{(\delta,\pi)}|K_n(t)|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Montrons que $|K_n(t)|$ admet dans $(0,\pi)$ une majorante décroissante $K_n^*(t)$ telle que

(16) $$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt<C_3.$$

Pour $|M_k(t)|$ on a évidemment la majorante décroissante

$$M_k^*(t)=\begin{cases}\left[(k+1)\dfrac{t}{2}\right]^2\Big/2\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^2=\pi^2(k+1)^2/8 & \left(0\leqq t\leqq\dfrac{2}{k+1}\right),\\[2ex] 1\Big/2\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^2=\pi^2/2t^2 & \left(\dfrac{2}{k+1}\leqq t\leqq\pi\right)\end{cases}$$

et

(17) $$\int_0^\pi M_k^*(t)\,dt\leqq C_4(k+1).$$

D'autre part,

$$|N_k(t)|=\frac{|\cos(n+1)t-\cos(k+1)t|}{2\sin^2 t/2}=\frac{|\sin(n+k+2)t/2\cdot\sin(n-k)t/2|}{\sin^2 t/2}$$

admet la majorante décroissante

$$N_k^*(t)=\begin{cases}\dfrac{(n+k+2)t/2\cdot(n-k)t/2}{(t/\pi)^2}=\pi^2(n+k+2)(n-k) & \left(0\leqq t\leqq\dfrac{2}{n+k+2}\right),\\[2ex] \dfrac{(n-k)\,t/2}{(t/\pi)^2}=\pi^2\dfrac{n-k}{2t} & \left(\dfrac{2}{n+k+2}\leqq t\leqq\dfrac{2}{n-k}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{(t/\pi)^2}=\pi^2\dfrac{1}{t^2} & \left(\dfrac{2}{n-k}\leqq t\leqq\pi\right),\end{cases}$$

et on a, pour $0\leqq k\leqq n$,

$$\int_0^\pi N_k^*(t)\,dt=\frac{\pi^2}{2}(n-k)\left[2+\log\frac{n+k+2}{n-k}\right]-\pi<$$
$$<\frac{\pi^2}{2}(n-k)\left[2+\log 2+\log\frac{n+1}{n-k}\right],$$

donc

(18) $$\int_0^\pi N_k^*(t)\,dt\leqq(n-k)\left(C_5+C_6\sum_{i=n-k}^{n}\frac{1}{i}\right).$$

Pour $|K_n(t)|$ on obtient ainsi la majorante décroissante

$$K_n^*(t)=\sum_{k=0}^{\nu-1} M_k^*(t)\,|\Delta_k^2|+\sum_{k=\nu}^{n-1} N_k^*(t)\,|\Delta_k^2|+M_n^*(t)\,|\Delta_\nu|.$$

Par (17) et (18),

$$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt \leqq C_4\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\,|\Delta_k^2|+\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\left(C_5+C_6\sum_{i=n-k}^{n}\frac{1}{i}\right)|\Delta_k^2|+C_4(\nu+1)\,|\Delta_\nu|,$$

d'où il résulte par (B) et par ses conséquences (7), (11), l'inégalité (16).

Or les propriétés

$$m_n(\delta)\to 0 \quad (n\to\infty), \qquad \int_0^\pi |K_n(t)|\,dt < C_3$$

suffisent à établir la convergence uniforme de $\sigma_n(x)$ vers $f(x)$ dans l'intérieur de tout intervalle $(a, b)$ où $f(x)$ est continue, on n'a qu'à se servir de (13) et de l'évaluation

$$\left|\int_0^\pi K_n(t)\,\varphi_x(t)\,dt\right| \leqq \max_{0\leqq t\leqq\delta}|\varphi_x(t)|\int_0^\pi |K_n|\,dt+m_n(\delta)\int_0^\pi|\varphi_x(t)|\,dt.$$

Pour montrer que $\sigma_n(x)$ tend vers $f(x)$ en tout point de Lebesgue, ou d'une manière plus précise, en tout point $x$ tel que

$$\Phi_x(t)=\int_0^t|\varphi_x(s)|\,ds=o(t) \quad \text{pour} \quad t\to 0,$$

on fera usage aussi des majorantes décroissantes et de (16). Pour un tel $x$, on aura $\Phi_x(t)\leqq\varepsilon t$ dès que $0\leqq t\leqq\delta=\delta(\varepsilon)$ et par conséquent

$$\left|\int_0^\delta K_n(t)\,\varphi_x(t)\,dt\right| \leqq \int_0^\delta K_n^*(t)\,|\varphi_x(t)|\,dt=[\Phi_x(t)\,K_n^*(t)]_0^\delta+\int_0^\delta \Phi_x(t)\,d[-K_n^*(t)] \leqq$$

$$\leqq [\varepsilon t\,K_n^*(t)]_0^\delta+\int_0^\delta \varepsilon t\,d[-K_n^*(t)]=\varepsilon\int_0^\delta K_n^*(t)\,dt < C_3\varepsilon.$$

D'autre part, pour $n$ assez élevés,

$$\left|\int_\delta^\pi K_n(t)\,\varphi_x(t)\,dt\right| \leqq m_n(\delta)\int_0^\pi|\varphi_x(t)|\,dt<\varepsilon.$$

On a donc

$$\left|\int_0^\pi K_n(t)\,\varphi_x(t)\,dt\right| < (1+C_3)\,\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon$ était arbitraire, cela achève la démonstration du théorème.

Dans une seconde communication on traitera des problèmes analogues pour la sommation des séries conjuguées.

*(Reçu le 25 juin 1949)*