

Sur les nombres de Lipschitz approximatifs.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

$F(x)$ étant une fonction réelle finie d'une variable réelle x , on appelle suivant BESICOVITCH [1] nombres de Lipschitz d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) de $F(x)$ au point x_0 les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{L}_\alpha^+ F(x_0) &= \limsup_{x \rightarrow x_0+0} \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)^\alpha}, & \underline{L}_\alpha^+ F(x_0) &= \liminf_{x \rightarrow x_0+0} \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)^\alpha}, \\ \bar{L}_\alpha^- F(x_0) &= \limsup_{x \rightarrow x_0-0} \frac{F(x_0) - F(x)}{(x_0 - x)^\alpha}, & \underline{L}_\alpha^- F(x_0) &= \liminf_{x \rightarrow x_0-0} \frac{F(x_0) - F(x)}{(x_0 - x)^\alpha}. \end{aligned}$$

Nous définissons les nombres de Lipschitz approximatifs $\bar{A}_\alpha^+ F(x_0)$, $\underline{A}_\alpha^+ F(x_0)$, $\bar{A}_\alpha^- F(x_0)$, $\underline{A}_\alpha^- F(x_0)$ par les mêmes formules, en y remplaçant la limite supérieure (resp. inférieure) par la limite supérieure (resp. inférieure) approximative¹⁾.

Dans son mémoire cité, BESICOVITCH démontre le théorème suivant : Pour toute fonction mesurable $F(x)$, l'ensemble des points x pour lesquels on a $\bar{L}_\alpha^- F(x) < \bar{L}_\alpha^+ F(x) < +\infty$, est de mesure nulle. Dans cette note, nous donnerons une démonstration plus simple de ce théorème, valable pour des fonctions arbitraires (mesurables ou non). D'autre part, nous établirons une proposition analogue pour les nombres de Lipschitz approximatifs.

Théorème 1. (Généralisation du théorème de BESICOVITCH.) *Pour toute fonction finie $F(x)$, l'ensemble des points x pour lesquels on a*

$$\bar{L}_\alpha^- F(x) < \bar{L}_\alpha^+ F(x) < +\infty,$$

est de mesure nulle.

Démonstration. On a $\bar{D}^- F(x) = -\infty$ pour tout point où on a $\bar{L}_\alpha^- F(x) < 0$, de sorte que cette inégalité ne peut avoir lieu que dans les points d'un ensemble de mesure nulle. Il suffit donc évidemment de montrer

¹⁾ La limite supérieure approximative à droite d'une fonction $f(x)$ au point x_0 est la borne inférieure des nombres y pour lesquels l'ensemble des valeurs x satisfaisant à l'inégalité $f(x) > y$ a la densité extérieure à droite 0 au point x_0 .

que pour $0 < p < q < r$ l'ensemble $E_{p,q,r}$ des points x satisfaisant à l'inégalité

$$0 \leq \bar{L}_\alpha^- F(x) < p < q < \bar{L}_\alpha^+ F(x) < r$$

est de mesure nulle. Désignons par η un nombre positif tel que $p + r\eta^\alpha < q$. Supposons que $|E_{p,q,r}| > 0$. En désignant par $E_{p,q,r,n}$ l'ensemble des points

$x \in E_{p,q,r}$ pour lesquels $x < t \leq x + \frac{1}{n}$ entraîne $F(t) - F(x) < r(t-x)^\alpha$ et

$x - \frac{1}{n} \leq t < x$ entraîne $F(x) - F(t) < p(x-t)^\alpha$, on a $E_{p,q,r} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{p,q,r,n}$, de

sorte que pour une valeur de n on a $|E_{p,q,r,n}| > 0$. x_0 soit un point de densité extérieure de $E_{p,q,r,n}$. On a alors en vertu de l'inégalité $L_\alpha^+ F(x_0) > q$ la relation

$$(1) \quad F(x) - F(x_0) > q(x - x_0)^\alpha$$

pour des valeurs $x > x_0$ arbitrairement voisines de x_0 ; x_1 soit une de ces valeurs assez voisine de x_0 pour que $x_1 - x_0$ soit moindre que $\frac{1}{n}$ et que la

mesure extérieure de la partie de l'ensemble $E_{p,q,r,n}$ située entre x_0 et x_1 dépasse le nombre $\eta(x_1 - x_0)$. On peut alors trouver des points de $E_{p,q,r,n}$ entre $x_1 - \eta(x_1 - x_0)$ et x_1 ; x_2 soit un tel point. On a donc les inégalités

$$F(x_2) - F(x_0) < p(x_2 - x_0)^\alpha \leq p(x_1 - x_0)^\alpha$$

et

$$F(x_1) - F(x_2) < r(x_1 - x_2)^\alpha \leq r\eta^\alpha(x_1 - x_0)^\alpha,$$

et par l'addition de ces deux inégalités

$$F(x_1) - F(x_0) < (p + r\eta^\alpha)(x_1 - x_0)^\alpha < q(x_1 - x_0)^\alpha,$$

ce qui est impossible en vertu de (1).

Théorème 2. Pour toute fonction finie et mesurable $F(x)$, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a

$$\bar{L}_\alpha^- F(x) < \bar{L}_\alpha^+ F(x) < +\infty,$$

est de mesure nulle.

Démonstration. Comme $\bar{L}_\alpha^- F(x) < 0$ entraîne $\bar{D}_{\alpha,p}^- F(x) = -\infty$, on a presque partout $\bar{L}_\alpha^- F(x) \geq 0$.²⁾ Il suffit donc de montrer que, $E_{p,q,r}$ désignant l'ensemble des points x satisfaisant aux inégalités

$$0 \leq \bar{L}_\alpha^- F(x) < p < q < \bar{L}_\alpha^+ F(x) < r,$$

on a $|E_{p,q,r}| = 0$ pour $0 < p < q < r$.

Considérons à ce but pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction

$$G(t) = p(1-t)^\alpha + rt^\alpha - q.$$

On a $G(0) = p - q < 0$, $G(1) = r - q > 0$ et une discussion facile montre que $G(t)$ atteint une valeur maximale pour une valeur t_0 située entre 0 et 1, et qu'il croît dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$ et décroît dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq 1$.

²⁾ Voir p. ex. SAKS [2].

On a donc une valeur unique $\lambda = \lambda(p, q, r)$ pour laquelle $G(\lambda) = 0$, $0 < \lambda < 1$ et $G(t)$ est monotone croissant pour $0 \leq t \leq \lambda$.

Ceci établi, désignons par $E_{p, q, r, n}$ l'ensemble des points $x \in E_{p, q, r}$ pour lesquels $0 < h \leq \frac{1}{n}$ entraîne les inégalités

$$|\mathbf{E}_t[F(t) - F(x) > r(t-x)^\alpha; x < t < x+h]| < \frac{\lambda}{3} h,$$

$$|\mathbf{E}_t[F(x) - F(t) > p(x-t)^\alpha; x-h < t < x]| < \frac{\lambda}{3} h.$$

($\mathbf{E}_t[P]$ désigne ici l'ensemble des points t jouissant de la propriété P .)

Désignons enfin par $E_{p, q, r, n, k}$ l'ensemble des points $x \in E_{p, q, r, n}$ dans lesquels la densité extérieure supérieure à droite de l'ensemble

$$\mathbf{E}_t[F(t) - F(x) > q(t-x)^\alpha; x < t]$$

dépasse le nombre $1/k$. On a évidemment

$$E_{p, q, r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{p, q, r, n, k},$$

de sorte qu'on n'a qu'à démontrer que $|E_{p, q, r, n, k}| = 0$.

Supposons donc que $A = E_{p_0, q_0, r_0, n_0, k_0}$ soit de mesure extérieure positive pour certaines valeurs p_0, q_0, r_0, n_0, k_0 . Désignons alors par x_0 un point de densité extérieure de A appartenant à A . On trouve alors des nombres h arbitrairement petits tels qu'on ait

$$(2) \quad |\mathbf{E}_t[F(t) - F(x_0) > q(t-x_0)^\alpha; x_0 < t < x_0+h]| > \frac{1}{k} h.$$

Soit h_0 un de ces nombres assez petit pour que les inégalités

$$(3) \quad 0 < h_0 < \frac{1}{n} \text{ et } |A \cdot [x_0, x_0+h_0]| > \left(1 - \frac{1}{2k}\right) h_0$$

soient satisfaites. $F(x)$ étant mesurable, l'ensemble figurant dans le membre gauche de (2) est mesurable, de sorte qu'on a

$$(4) \quad |\mathbf{E}_t[F(t) - F(x_0) \leq q(t-x_0)^\alpha; x_0 < t < x_0+h_0]| < \left(1 - \frac{1}{k}\right) h_0.$$

En vertu de (3) et (4), un point x_1 existe tel que $x_0 < x_1 < x_0+h_0$, $x_1 \in A$ et

$$(5) \quad F(x_1) - F(x_0) > q(x_1-x_0)^\alpha.$$

x_0 et x_1 appartenant à A , on a en vertu de $0 < x_1-x_0 < \frac{1}{n}$ les inégalités

$$(6) \quad |\mathbf{E}_t[F(t) - F(x_0) > r(t-x_0)^\alpha; x_0 < t < x_1]| < \frac{\lambda}{3} (x_1-x_0),$$

$$(7) \quad |\mathbf{E}_t[F(x_1) - F(t) > p(x_1-t)^\alpha; x_0 < t < x_1]| < \frac{\lambda}{3} (x_1-x_0).$$

(6) et (7) entraînent qu'un point x_2 existe tel que

$$x_0 < x_2 < x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$$

et

$$F(x_2) - F(x_0) \leq r(x_2 - x_0)^\alpha, \quad F(x_1) - F(x_2) \leq p(x_1 - x_2)^\alpha.$$

En écrivant $x_2 - x_0 = \mu(x_1 - x_0)$, on a alors

$$F(x_1) - F(x_0) \leq p(x_1 - x_2)^\alpha + r(x_2 - x_0)^\alpha = [p(1 - \mu)^\alpha + r\mu^\alpha](x_1 - x_0)^\alpha.$$

Mais $0 < \mu < \lambda$ entraîne en vertu de ce que nous venons d'établir sur la monotonie de la fonction $G(t)$ que $G(\mu) < 0$, c'est-à-dire que $p(1 - \mu)^\alpha + r\mu^\alpha < q$, ce qui donne enfin

$$F(x_1) - F(x_0) < q(x_1 - x_0)^\alpha,$$

ce qui contredit à l'inégalité (5). C. Q. F. D.

Corollaire. *F(x) étant une fonction finie et mesurable satisfaisant aux points d'un ensemble E aux inégalités $\bar{A}_\alpha^+ F(x) < +\infty$, $\bar{A}_\alpha^- F(x) < +\infty$, on a $\bar{A}_\alpha^+ F(x) = \bar{A}_\alpha^- F(x)$ presque partout dans E.*

Ouvrages cités.

- [1] A. S. BESICOVITCH, On Lipschitz numbers, *Math. Zeitschrift*, **30** (1929), p. 514—519.
 [2] S. SAKS, *Theory of the integral* (Warszawa—Lwów, 1937), p. 295.

(Reçu le 14 septembre 1949)