Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Étant donné dans l'intervalle fermé $[-1, 1]$ une fonction non-négative $w(x)$ intégrable, elle y détermine — comme on sait — exactement un système $\{p_n(x)\}$ de polynomes orthogonaux et normés. Soit

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \tag{1}$$

où

$$c_n = \int_{-1}^{+1} w(x) f(x) p_n(x)\, dx,$$

le développement formel suivant les polynomes $p_n(x)$ d'une fonction $f(x)$.

On ne sait que très peu sur la convergence et la sommabilité presque partout du développement (1), excepté le cas où la nature de la fonction de poids $w(x)$ est restreinte par des conditions de continuïté assez étroites qui permettent de ramener ces problèmes aux problèmes analogues concernant le développement en série de Fourier de la fonction $f(\cos\theta)$ où $\theta = \arccos x$. Dans ce qui suit, nous allons rechercher ces problèmes sans supposer beaucoup sur la nature de la fonction $w(x)$, mais en introduisant certaines conditions concernant les coefficients de Fourier de la fonction $f(\cos\theta)$. Il en résulte que, même si l'on ne sait rien sur l'équiconvergence de la série (1) et de la série de Fourier de $f(\cos\theta)$, il y a une analogie entre le comportement de ces deux espèces de développements et on peut dire que la série de Fourier de $f(\cos\theta)$ joue, en certain sens, un rôle déterminant dans le problème de la convergence et de la sommabilité presque partout du développement (1).

2. En introduisant, au lieu de x, la variable $\theta = \arccos x$, la fonction $f(\cos\theta)$ définie dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est paire, la n-ième somme partielle

[1]) En ce qui concerne les théorèmes respectifs, voir par exemple G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials* (New York, 1939).

de son développement de Fourier est donc de la forme

$$s_n(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

où

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Lemme.[2]) *Si* $0\leqq w(x)\leqq W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ *où* W *est une constante arbitraire, on a*

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2\leq \frac{W\pi}{2}\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \tag{2}$$

et, d'une manière plus générale,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2\leq \frac{W\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^2 \tag{3}$$

pour toute suite croissante $\{\lambda_n\}$ *de nombres positifs.*

Démonstration. Désignons par $S_n(x)$ la n-ième somme partielle du développement (1). Il est connu que

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\left[f(x)-S_{n-1}(x)\right]^2 dx\leqq\int_{-1}^{+1} w(x)\left[f(x)-P_{n-1}(x)\right]^2 dx,$$

quel que soit le polynome $P_{n-1}(x)$ de degré $n-1$. Choisissons pour $P_{n-1}(x)$ le polynome de degré $n-1$ qu'on obtient de $s_{n-1}(\theta)$ en y posant $\theta=\arccos x$. Il s'ensuit de l'inégalité précédente:

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2=\int_{-1}^{+1} w(x)\left[f(x)-S_{n-1}(x)\right]^2 dx\leq\int_0^\pi w(\cos\theta)\sin\theta\left[f(\cos\theta)-s_{n-1}(\theta)\right]^2 d\theta\leq$$

$$\leq W\int_0^\pi\left[f(\cos\theta)-s_{n-1}(\theta)\right]^2 d\theta=\frac{W\pi}{2}\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2$$

et l'inégalité (2) est démontrée.

Pour démontrer l'inégalité (3), désignons les deux membres de (2) par C_n et A_n. On a $c_k^2=C_k-C_{k+1}$, $\frac{W\pi}{2}a_k^2=A_k-A_{k+1}$. D'après (2), on a $C_n\leq A_n$;

[2]) Qu'il me soit permis d'exprimer mes remerciements à M. Béla Sz.-Nagy à qui je dois cette forme de mon lemme et un raccourcissement de ma démonstration originelle. Sa remarque permet aussi une amélioration de mes résultats antérieurs concernant la convergence absolue et l'ordre d'approximation des développements en série de polynomes orthogonaux (G. Alexits, Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, *Commentarii Math. Helvetici,* **16** (1943), p. 200—208). On peut notamment montrer que mes résultats respectifs restent exactes même si l'on y remplace l'hypothèse originelle $0\leq w(x)\leqq W$ par l'hypothèse plus large $0\leqq w(x)\leqq W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

il en résulte par une transformation abélienne (en posant $\lambda_0=0$):

$$\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k c_k^2=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})C_k-\lambda_n C_n\leqq\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})A_k=$$

$$=\frac{W\pi}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k a_k^2+\lambda_n A_n\leqq\frac{W\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k a_k^2+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k a_k^2\right),$$

ce qui prouve (3).

3. Théorème 1. *Si* $0\leqq w(x)\leqq W(1-x^2)^{-1/2}$ *et si* $\sum a_n^2\log^2 n<\infty$ *respectivement* $\sum a_n^2(\log\log n)^2<\infty$, *la série* (1) *est presque partout convergente, respectivement presque partout sommable* $(C, 1)$.

Pour le démontrer, on n'a qu'à appliquer le lemme avec $\lambda_n=\log^2 n$, respectivement avec $\lambda_n=(\log\log n)^2$ et à rappeler que la convergence des séries

$$\sum c_n^2\log^2 n,\ \text{resp.}\ \sum c_n^2(\log\log n)^2$$

entraîne la convergence, respectivement la sommabilité $(C, 1)$ presque partout de la série (1)[3]).

Théorème 2. *Si* $0\leqq w(x)\leqq W(1-x^2)^{-1/2}$ *est si les polynomes* $p_n(x)$ *sont uniformément bornés, la convergence de la série* $\sum a_n^2\log n$ *entraîne la convergence presque partout de la série* (1).

En posant $\lambda_n=\log n$, on obtient de (3) la convergence de la série $\sum c_n^2\log n$. Or ce fait, combiné avec l'hypothèse que les $p_n(x)$ soient uniformément bornés, implique, d'après un résultat antérieur de l'auteur[4]), la convergence presque partout de la série (1).

(Reçu le 31 décembre 1949)

[3]) S. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), p. 164, [535] et p. 190, [586].

[4]) L. c.[2]), p. 201.