Sur quelques propriétés des dérivées des fonctions d'une variable réelle.

Par NIKOLA OBRECHKOFF à Sofia.

Dans ce travail nous démontrons quelques inégalités pour les dérivées des fonctions réelles définies sur le demi-axe ou sur tout l'axe réel et des inégalités pour les différences des suites de nombres réels. Nous en déduirons aussi quelques propriétés nouvelles pour les fonctions réelles.

1. Fonctions définies sur le demi-axe réel.

Théorème I. *Soit $f(x)$ une fonction réelle telle que $f^{(n)}(x) \geqq 0$ pour $x > a$. Supposons qu'il existe une suite*

$$(1) \qquad \{y_\lambda\}_1^\infty \qquad \lim_{\lambda \to \infty} y_\lambda = \infty,$$

et un entier m $(0 \leqq m < n)$ tels que

$$(2) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = 0.$$

On a alors pour $x > a$

$$(3) \qquad (-1)^{n-m} f^{(m)}(x) \geqq 0, \; (-1)^{n-m-1} f^{(m+1)}(x) \geqq 0, \ldots, \; -f^{(n-1)}(x) \geqq 0,$$

$$(4) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f^{(i)}(x)}{x^{m-i}} = 0 \quad (0 \leqq i \leqq m-1), \quad \lim_{x \to \infty} f^{(i)}(x) = 0 \quad (m \leqq i \leqq n-1).$$

De plus, si la fonction $f^{(i)}(x)$ $(m \leqq i \leqq n-1)$ s'annule pour un $x = b > a$, elle s'annule pour tout $x > b$.

Supposons que le théorème soit déjà démontré pour $n-1$. Puisque $f^{(n)}(x) \geqq 0$, la fonction $f^{(n-1)}(x)$ est non décroissante pour $x > a$. Supposons que pour un nombre α on ait $f^{(n-1)}(\alpha) = C > 0$; alors $f^{(n-1)}(x) \geqq C$ pour $x \geqq \alpha$. On en obtient par intégration que

$$f(x) \geqq C \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + P(x)$$

où $P(x)$ est un polynome de degré $\leqq n-2$. Donc on aura

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{n-1}} \geqq \frac{C}{(n-1)!} > 0,$$

ce qui est en contradiction avec (2). Par conséquent $f^{(n-1)}(x) \leqq 0$ pour $x > a$. Si $m = n-1$, la première des inégalités (3) est démontrée. Soit $m < n-1$; le théorème étant vrai pour $n-1$, on a

$$(-1)^{n-1-m}[-f(x)]^{(m)} \geqq 0, \text{ donc } (-1)^{n-m} f^{(m)}(x) \geqq 0 \text{ pour } x > a.$$

Les autres inégalités de (3) découlent d'ici puisque, par (2),

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^k} = 0 \qquad \text{pour} \quad k \geqq m+1.$$

Si $n-m$ est pair, les deux premières des inégalités (3) assurent que la fonction $f^{(m)}(x)$ soit non négative et non croissante. Par conséquent, elle tend vers une limite B lorsque $x \to \infty$. D'après la règle d'Hospital, on aura $\lim_{x \to \infty} (f(x)/x^m) = m!\, B$, d'où et de (2) il suit que $B = 0$. Si $n-m$ est impair, $f^{(m)}(x)$ est non positive et non décroissante et on a le même résultat. Les autres égalités de (4) découlent d'ici immédiatement.

Supposons enfin que $f^{(i)}(b) = 0$ pour un i, $m \leqq i < n$. La fonction $(-1)^{n-i} f^{(i)}(x)$ étant, en vertu des inégalités (3), non négative et non croissante pour $x > a$, s'annule nécessairement pour $x \geqq b$. Cela achève la démonstration du théorème.

Soient maintenant $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions réelles qui admettent pour $x > a$ les dérivées $\varphi^{(n)}(x)$ et $\psi^{(n)}(x)$ et supposons que pour une suite (1) et pour un nombre entier m $(0 \leqq m < n)$ les limites

(7) $$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\varphi(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = B, \ \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\psi(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = C$$

existent. Si

(6) $$\psi^{(n)}(x) \leqq \varphi^{(n)}(x) \qquad (x > a),$$

on aura

(7) $$(-1)^{n-m}[\psi^{(m)}(x) - m!\, C] \leqq (-1)^{n-m}[\varphi^{(m)}(x) - m!\, B] \qquad (x > a).$$

Cette proposition découle immédiatement du théorème I, en considérant la fonction auxilière $f(x) = \varphi(x) - \psi(x) - (B-C)\, x^m$ pour laquelle $\lim f(y_\lambda)/y_\lambda^m = 0$ et $f^{(n)}(x) \geqq 0$. La remarque pour le signe d'égalité dans (7) reste valable.

Si au lieu de (6) on a

(8) $$|\psi^{(n)}(x)| \leqq |\varphi^{(n)}(x)|,$$

la fonction $\varphi^{(n)}(x)$ ne changeant pas de signe pour $x > a$, on aura au lieu de (7) l'inégalité suivante

$$|\psi^{(m)}(x) - m!\, C| \leqq |\varphi^{(m)}(x) - m!\, B|.$$

En effet, si par exemple $\varphi^{(n)}(x) \geqq 0$ pour $x > a$, l'inégalité (8) est équivalente à $-\varphi^{(n)}(x) \leqq \psi^{(n)}(x) \leqq \varphi^{(n)}(x)$ et on aura

$$(-1)^{n-m-1}[\varphi^{(m)}(x) - m!\, B] \leqq (-1)^{n-m}[\psi^{(m)}(x) - m!\, C] \leqq (-1)^{n-m}[\varphi^{(m)}(x) - m!\, B].$$

On a la même remarque pour le signe d'égalité.

2. Fonctions définies sur tout l'axe réel.

Théorème II. *Soit $f(x)$ une fonction réelle telle que $f^{(n)}(x) \geqq 0$ pour $-\infty < x < \infty$. Supposons encore qu'il existe une suite à deux côtés*

$$\{y_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \lim_{\lambda \to -\infty} y_\lambda = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} y_\lambda = \infty, \tag{9}$$

et un entier m $(0 \leqq m < n)$ tels que

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = 0. \tag{10}$$

Alors la fonction $f(x)$ est un polynome de degré $\leqq m-1$.

En effet, de la condition (10) pour $\lambda \to \infty$ et du théorème I il suit que $f^{(n-1)}(x) \leqq 0$ pour tous les x. Considérons maintenant la fonction $\varphi(x) = (-1)^n f(-x)$. On a $\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(-x) \geqq 0$ pour $-\infty < x < \infty$. De la condition (10) pour $\lambda \to -\infty$ et du théorème I on conclut alors que $f^{(n-1)}(-x) \geqq 0$. Donc $f^{(n-1)}(x) = 0$ pour tous les x et $f(x)$ est un polynome dont le degré, à cause de (10), ne surpasse pas le nombre $m-1$.

Ce théorème a les corollaires suivants:

a) *Si $f^{(n)}(x) \geqq 0$ et $|f(x)| < K(1+|x|^m)$ pour $-\infty < x < \infty$, alors $f(x)$ est un polynome de degré $\leqq m$.*

b) *Soit $\varphi(x) \geqq 0$ pour $-\infty < x < \infty$ et soit $f(x)$ une autre fonction réelle qui pour $-\infty < x < \infty$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre n. Supposons encore que pour chaque x réel on ait $\frac{d^n}{dx^n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \geqq 0$ et $|f(x)| < K\varphi(x)$, K étant une constante. Alors $f(x) = K_1 \varphi(x)$ où K_1 est une constante.*

Prenant en particulier $\varphi(x) = e^x$, on obtient la proposition suivante:

Les inégalités $|f(x)| < Ke^x$ et $(-1)^n \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu f^{(\nu)}(x) \geqq 0$ pour chaque x entraînent que $f(x) = K_1 e^x$, K_1 étant une constante.

Théorème III. *Soit $f(x)$ une fonction réelle telle que $f^{(2n)}(x) \geqq 0$ pour $-\infty < x < \infty$. Supposons encore que pour une suite infinie $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ de type (9) on ait $\lim_{\lambda \to \pm\infty} f(y_\lambda)/y_\lambda^{2n-1} = 0$. Alors $f(x)$ est un polynome de degré $2n-2$.*

La fonction $f^{(2n-1)}(x)$ est non décroissante. Supposons que pour un α on ait $f^{(2n-1)}(\alpha) = C > 0$. Alors on conclut comme plus haut que pour $x > \alpha$ on a $f(x) > \frac{C}{(2n-1)!} x^{2n-1} + R(x)$ où $R(x)$ est un polynome de degré $< 2n-1$, ce qui est en contradiction aves nos hypothèses. Donc on aura $f^{(2n-1)}(x) \leqq 0$ pour tous les x. Considérons maintenant la fonction $\varphi(x) = f(-x)$. Comme on a $\varphi^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(-x) \geqq 0$, le même raisonnement vérifie que $\varphi^{(2n-1)}(x) \leqq 0$, c'est-à-dire $f^{(2n-1)}(x) \geqq 0$ pour tous les x. Donc $f^{(2n-1)}(x) = 0$ et le théorème est démontré.

Théorème IV. *Soit $\psi(x)$ une fonction réelle qui admet pour tous les x les dérivées jusqu'à l'ordre $2n$ et telle que*

$$\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^{\nu}\binom{2n}{\nu}\psi^{(\nu)}(x)\geqq 0 \tag{11}$$

pour tous les x. Supposons encore que pour une suite $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ de type (9) *on ait*

$$\psi(y_\lambda)<Q(y_\lambda)\,e^{y_\lambda}$$

où $Q(x)$ est un polynome de degré $2n-2$. La fonction $\psi(x)$ est alors égale à $Q_1(x)e^x$ où $Q_1(x)$ est un polynome de degré $2n-2$.

Ce théorème découle immédiatement du précédent en l'appliquant à la fonction $f(x)=\psi(x)\,e^{-x}$.

D'après S. Bernstein, une fonction réelle $f(x)$ est dite absolument monotone dans un intervalle (a, b) si elle y est indéfiniment dérivable et si

$$f^{(n)}(x)\geqq 0 \qquad (a<x<b\,;\; n=0, 1, 2, \ldots).$$

On sait bien que pour une telle fonction on a $f''(x)-2f'(x)+f(x)\geqq 0$. Donc on obtient du théorème II, comme cas particulier, le résultat suivant:

Si la fonction $f(x)$ est absolument monotone dans $(-\infty, \infty)$ et si pour une suite $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ on a $f(y_\lambda)<e^{y_\lambda}$, alors la fonction $f(x)$ est égale à Ce^x où C est une constante.

Remarquons que, dans le cas où $f(x)<e^x$, $-\infty<x<\infty$, ce résultat peut être obtenu du théorème de Liouville en se basant sur la propriété connue que la fonction $f(x)$ est régulière dans chaque domaine fini du plan des nombres complexes et que l'on a pour le module de $f(x+iy)$ l'inégalité $|f(x+iy)|\leqq f(x)$.

De cette proposition on peut tirer la suivante:

Soit $f(x)$ une fonction absolument monotone pour $x<a$ et satisfaisant pour un $b<a$ aux conditions

$$f^{(n)}(b)<K\;(n=0, 1, 2, 3, \ldots), \qquad f(x)<e^x \qquad (x\leqq b).$$

où K est une constante. Alors $f(x)$ est égale à Ce^x, où C est une constante.

En effet on a pour $x\geqq b$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{n!}f^{(n)}(b)<Ke^{x-b}<K_1e^x, \quad f^{(n)}(x)>0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

et la fonction $f(x)$ est absolument monotone pour tous les x.

La proposition suivante se démontre d'une manière analogue.

Supposons que pour la fonction réelle $\varphi(x)$, deux fois dérivable pour tout x, on ait $\varphi''(x)-4\mu x\varphi'(x)+(4\mu^2x^2-2\mu)\,\varphi(x)\geqq 0$ et $\varphi(y_\lambda)<e^{\mu y_\lambda^2}$ pour une suite $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ de type (9), *μ étant une constante réelle. On a alors $\varphi(x)=Ce^{\mu x^2}$, où C est une constante.*

Par la même méthode, on peut démontrer des théorèmes analogues pour les différences des fonctions. On peut généraliser aussi le théorème IV et les résultats analogues pour les fonctions satisfaisant à une inégalité différentielle.

3. Inégalités pour les suites de nombres.

Théorème V. *Soit* $\{a_n\}_1^\infty$ *une suite infinie de nombres réels et supposons qu'il existe une suite* $\{k_\lambda\}_1^\infty$ *d'entiers indéfiniment croissants et un nombre entier* $m \geqq 0$ *tels que* $a_{k_\lambda}/k_\lambda^m \to A$ *lorsque* $\lambda \to \infty$. *Désignons par*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n, \ldots$$

les différences de la suite $\{a_n\}$ *et supposons que pour un* $p > m$ *les différences* $\Delta^p a_n$ *soient non négatives pour* $n > n_0$. *On a alors*

$$(-1)^{p-m}(\Delta^m a_n - m!\,A) \geqq 0 \quad et \quad (-1)^{p-i}\Delta^i a_n \geqq 0 \quad (m+1 \leqq i \leqq p)$$

pour $n > n_0$. *Comme conséquence on aura pour* $n \to \infty$

$$\lim n^{-m} a_n = A, \quad \lim n^{1-m} \Delta a_n = mA, \ldots, \lim \Delta^m a_n = m!\,A,$$
$$\lim \Delta^i a_n = 0 \ (m+1 \leqq i < p).$$

La démonstration est complètement analogue à celle du théorème I.

Théorème VI. *Soit* $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ *une suite à deux côtés de nombres réels et supposons qu'il existe une suite d'entiers*

$$\{k_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \lim_{\lambda \to -\infty} k_\lambda = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} k_\lambda = \infty, \tag{12}$$

et un entier $m \geqq 0$ *tels que* $a_{k_\lambda}/k_\lambda^m \to 0$ *pour* $\lambda \to \pm\infty$. *Supposons encore que pour un* $p > m$ *les différences* $\Delta^p a_n$ $(-\infty < n < \infty)$ *soient non négatives. Alors* a_n *est un polynome de* n *de degré* $< m$.

Théorème VII. *Soit* $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ *une suite de nombres réels et supposons que les différences d'ordre pair* $\Delta^{2p} a_n$ *soient non négatives pour toutes les valeurs de* n. *Supposons encore que, pour une suite* (12), $a_{k_\lambda}/k_\lambda^{2p-1} \to 0$ *pour* $\lambda \to \pm\infty$. *Alors* a_n *est un polynome de* n *de degré* $\leqq 2p-2$.

Théorème VIII. *Soit* $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *une suite de nombres réels telle que pour un nombre pair* $2p$ *et pour tous les* n *on ait* $\Delta^{2p}(q^{-n}a_n) \geqq 0$, *où* q *est un nombre positif arbitraire. Supposons encore que pour une suite* (12) *on ait* $a_{k_\lambda} < P(k_\lambda)\, q^{k_\lambda}$ *où* $P(x)$ *est un polynome réel de degré* $2p-2$. *Alors* $a_n = Q(n) q^n$ *où* $Q(n)$ *est un polynome de degré* $\leqq 2p-2$.

Ce théorème découle immédiatement du précédent en l'appliquant à la suite $q^{-n}a_n$.

(Reçu le 3 janvier 1950)