Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einer Reziprozitätsformel von Dedekind.

Von L. RÉDEI in Szeged.

Wir setzen

$$F_m(x)=\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+\ldots+x+1 \qquad (m>1). \tag{1}$$

Nachher bezeichnen $m, n\,(>1)$ teilerfremde natürliche Zahlen und m', n' eine ganzzahlige Lösung von

$$mm'+nn'=1. \tag{2}$$

Auch die Polynome $F_m(x), F_n(x)$ sind teilerfremd, und so ist die Gleichung

$$F_m(x)\,X_{mn}(x)+F_n(x)\,X_{nm}(x)=1 \tag{3}$$

in Polynomen $X_{mn}(x)$, $X_{nm}(x)$ lösbar. Der Grad dieser Polynome kann man kleiner als $n-1$ bzw. $m-1$ wählen, was wir im folgenden tun wollen, und dann ist die Lösung von (3) eindeutig definiert. Meines Wissens hat man sich mit der expliziten Auflösung von (3) bisher noch nicht beschäftigt, obwohl die Wichtigkeit dieser Aufgabe nicht abzusprechen ist. Ich habe vor einigen Jahren die gesagte Lösung von (3) bestimmt, sie aber noch nicht veröffentlicht. Sie lautet:

$$X_{mn}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\left\{\frac{km'}{n}\right\}+\left\{\frac{(k-1)m'}{n}\right\}+\left\{\frac{-m'}{n}\right\}-\left\{\frac{-2m'}{n}\right\}\right)x^k, \tag{4}$$

wobei

$$\{z\}=z-[z]-\frac{1}{2} \tag{5}$$

und $[z]$ die größte ganze Zahl $\leqq z$ bezeichnet. Der Grad von (4) ist wirklich kleiner als $n-1$, denn der Summand verschwindet für $k=n-1$. Selbstverständlich hat man $X_{nm}(x)$ so zu bilden, daß man in (4) nicht nur m und n miteinander sondern auch m' mit n' vertauscht.)

Es wäre unschwer die Richtigkeit der Lösungsformel (4) durch Einsetzung in (5) auszuweisen. Ich nehme hier davon Abstand und führe den Beweis in einer anderen Arbeit aus. ((4) bleibt gültig und wird etwas vereinfacht, wenn man [ ] für { } schreibt und rechts mit -1 multipliziert, aber wir behalten (4) in der angeschriebenen Form.)

Aus der durch (3), (4) angegebene Reziprozitätsbeziehung lassen sich verschiedene weitere Folgerungen ziehen. Insbesondere entsteht aus ihr der quadratische Reziprozitätssatz (für Primzahlen m, n), so daß man $x=-1$ einsetzt, was ich hier ebenfalls nicht ausführe.

Eine Reziprozitätsformel von DEDEKIND[1]) lautet so:

$$S_{mn}+S_{nm}=\frac{1}{12mn}(m^2-3mn+n^2+1), \tag{6}$$

wobei

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k}{n}\right\}\left\{\frac{mk}{n}\right\}. \tag{7}$$

Außer dem Originalbeweis von Dedekind hat RADEMACHER[2])[3]) früher zwei Beweise für (6) mitgeteilt[4]), ferner teilte er in diesem Band einen weiteren recht kurzen Beweis mit[5]). Ich beweise hier (6) ebenfalls sehr leicht und elementar. Mein Verfahren besteht im wesentlichen daraus, daß ich in (3) $x=1+t$ einsetze und beiderseits die Koeffizienten von t^2 miteinander vergleiche. (Auf ähnlichem Wege ließe sich eine Fülle von Reziprozitätsformeln von der Art (6) gewinnen, weshelb wir (3) eine Verallgemeinerung von (6) ansehen können.)

Wir bemerken zunächst, daß $\left\{\frac{k}{n}\right\}$ bei festem n nur von der Restklasse $k \pmod n$ abhängt. Deshalb darf im Summand von (7) k durch $m'k$ ersetzt werden, und so geht (7) bei Berücksichtigung von (2) in

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{m'k}{n}\right\}\left\{\frac{k}{n}\right\} \tag{8}$$

über. Ferner bemerken wir, daß aus (5) wegen

$$\left\{\frac{k}{n}\right\}=\frac{k}{n}-\frac{1}{2} \qquad (k=1,\ldots,n-1) \tag{9}$$

sofort

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k}{n}\right\}=0 \tag{10}$$

---

1) R. DEDEKIND, *Gesammelte Math. Werke*, Bd. 1 (1930), S. 159—172.

2) H. RADEMACHER, Zur Theorie der Modulfunktionen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **167** (1932), S. 312—336. Hier auf Seiten 318—321 findet sin ein Gitterpunktbeweis.

3) H. RADEMACHER, Über eine Reziprozifätsformel aus der Theorie der Modulfunktionen, *Mat. és Fiz. Lapok*, **40** (1933), S. 24—34. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

4) Vgl. L. RÉDEI, Bemerkung zur vorstehenden Arbeit des Herrn H. Rademacher, *Ebenda*, S. 35—39. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

5) H. RADEMACHER, Die Reziprozitätsformel für Dedekindsche Summen, *diese Acta*, **12 B** (1950), S. 57—60.

folgt. Hier darf der Zähler k durch $m'k$ ersetzt werden, und so folgt aus (8), (9)

$$S_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{m'k}{n} \right\} k. \tag{11}$$

Endlich schicken wir noch die Formeln

$$\left\{ \frac{-m'}{n} \right\} + \left\{ \frac{-n'}{m} \right\} = -\frac{1}{mn}, \tag{12}$$

$$\left\{ \frac{-2m'}{n} \right\} + \left\{ \frac{-2n'}{m} \right\} = -\frac{2}{mn} \tag{13}$$

voran. Um diese zu zeigen, schreiben wir (2) in der Form

$$-\frac{m'}{n} - \frac{n'}{m} = -\frac{1}{mn}. \tag{14}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\left[\frac{-m'}{n} \right] + \left[\frac{-n'}{m} \right] = -1, \quad \left[\frac{-2m'}{n} \right] + \left[\frac{-2n'}{m} \right] = -1,$$

woraus und aus (5), (14) sofort (12), (13) entsteht.

Um nunmehr (6) zu beweisen, führen wir den Operator $\mathfrak{S}$ definiert durch

$$\mathfrak{S} f(m, n, m', n') = f(m, n, m', n') + f(n, m, n', m')$$

ein. Mit dieser Symbolik schreibt sich (3) so:

$$\mathfrak{S} F_m(x) X_{mn}(x) = 1.$$

Setzt man hier (4) ein, so folgt aus (12), (13) wegen (1)

$$\mathfrak{S} F_m(x) \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{km'}{n} \right\} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(k-1)m'}{n} \right\} x^k \right) = 1 - \frac{1}{mn} F_m(x) F_n(x). \tag{15}$$

Die zweite Summe schreibt sich (wegen (5)) so:

$$\sum_{k=-1}^{n-2} \left\{ \frac{km'}{n} \right\} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{km'}{n} \right\} x^{k+1} + \left\{ \frac{-m'}{n} \right\} - \left\{ \frac{-m'}{n} \right\} x^n$$

und so folgt aus (15), (12), (1):

$$\mathfrak{S} F_m(x)(x-1) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{km'}{n} \right\} x^k = 1 - \frac{1}{mn} F_m(x) F_n(x) - \frac{1}{mn}(x-1) F_m(x) F_n(x).$$

Wieder nach (1) gilt also

$$\mathfrak{S}(x^m - 1) \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{m'k}{n} \right\} x^k = 1 - \frac{x}{mn} F_m(x) F_n(x) + \frac{1}{2}(x^m - 1) + \frac{1}{2}(x^n - 1),$$

wobei man das zu $k=0$ gehörige Glied auf die rechte Seite geschafft hat. Setze man hier $x = 1 + t$ ein (beachte (1)) und vergleiche die Koeffizienten von t^2 miteinander:

$$\mathfrak{S}\left(m\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{m'k}{n}\right\}k+\binom{m}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{m'k}{n}\right\}\right)=$$

$$=-\frac{1}{mn}\left(m\binom{n}{3}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{3}n+m\binom{n}{2}+\binom{m}{2}n\right)+\frac{1}{2}\binom{m}{2}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}.$$

Die zweite Summe verschwindet, und so gilt nach (11)

$$mn\,\mathfrak{S}S_{mn}=-\left(\frac{1}{3}\binom{n-1}{2}+\frac{(m-1)(n-1)}{4}+\frac{1}{3}\binom{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{m-1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\binom{m}{2}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}.$$

Die rechte Seite berechnet sich zu

$$\frac{1}{12}(m^2-3mn+n^2+1).$$

Das beendet den Beweis von (6).

(Eingegangen am 20. Januar 1950.)