Sur la convergence d'une classe de séries orthonormales.

Par Georges Alexits à Budapest.

1. Nous nous occuperons, dans les suivants, des séries orthonormales

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

dont les coefficients sont soumis à la condition $|c_n| \geqq |c_{n+1}|$ et démontrerons le théorème:

Si $|c_n| \geqq |c_{n+1}|$ *et, pour un* $\varepsilon > 0$ *quelconque,*

$$c_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^{1+\varepsilon}}\right), \tag{2}$$

la série (1) *converge presque partout.*

2. Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer notre proposition sous l'hypothèse restrictive $c_n \geqq c_{n+1} \geqq 0$. En effet, soient $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ les coefficients positifs de la série (1). Les hypothèses de notre théorème entraînent $c_{k_n} \geqq c_{k_{n+1}}$, et $c_{k_n} = O(n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-1-\varepsilon})$. Si nous démontrons le théorème pour des séries orthonormales dont les coefficients sont positifs et forment une suite décroissante, alors, en posant $\psi_n(x) = \varphi_{k_n}(x)$ et $a_n = c_{k_n}$, la série $\Sigma a_n \psi_n(x)$ doit être convergente presque partout. La même chose est valable pour la série $\Sigma b_n \chi_n(x)$ où b_n est le n-ième coefficient négatif de la série (1) et $\chi_n(x)$ la fonction $\varphi_{i_n}(x)$ correspondante à ce coefficient. La série (1), étant la somme des séries $\Sigma a_n \psi_n(x)$ et $\Sigma b_n \chi_n(x)$, converge aussi presque partout. Nous pouvons donc supposer, sans restriction de la généralité, que $c_n \geqq c_{n+1} \geqq 0$.

3. Désignons par

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

la n-ième somme partielle de la série (1) et posons

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x).$$

Alors, en supposant $c_n \geqq c_{n+1} \geqq 0$, on a

$$|s_m(x)-s_n(x)| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)| + c_{m+1}|\Phi_m(x)| + c_{n+1}|\Phi_m(x)|.$$

MM. Gál et Koksma ont démontré[1]) que $\Phi_n(x) = o(\sqrt{n}\,(\log n)^{1+\varepsilon})$ presque partout; par conséquent, les deux derniers termes de l'inégalité précédente sont $= o(1)$ presque partout en vertu de l'ordre de grandeur (2) des coefficients c_n. Notre théorème sera donc démontré, dès que nous réussissons à établir la validité presque partout de la relation

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)| = o(1). \tag{3}$$

Or

$$\int_a^b |\Phi_k(x)|\,dx \leqq \left\{ \int_a^b dx \int_a^b \Phi_k^2(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(b-a)k},$$

et par conséquent,

$$\int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)|\,dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})\sqrt{k} \leqq$$

$$\leqq c_{n+1}\sqrt{(b-a)(n+1)} + \sqrt{b-a} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\,c_{k+1} \leqq$$

$$\leqq c_{n+1}\sqrt{(b-a)(n+1)} + \frac{\sqrt{b-a}}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

Vu l'ordre de grandeur (2) des cofficients c_k, on en tire pour un indice N suffisamment grand:

$$\int_a^b \sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)|\,dx < \eta^2$$

quelque petit que soit $\eta > 0$ donné d'avance. Désignons par A l'ensemble des points x auxquels

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)| \geqq \eta$$

et par $|A|$ la mesure de l'ensemble A, alors

$$\eta|A| \leqq \int_A \sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)|\,dx < \eta^2,$$

c'est-à-dire: $|A| < \eta$. Mais

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)| \geqq \sum_{k=n+2}^{\infty} (c_k-c_{k+1})|\Phi_k(x)|,$$

1) Je tiens cette communication de M. Gál. La publication paraîtra sous peu.

donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{k+1}) |\Phi_k(x)| < \eta$$

pour tout $n \geqq N$ et en tout point x exceptés les points de l'ensemble A de mesure $< \eta$, ce qui équivaut à la relation (3) et la démonstration de notre théorème est achevée.

4. Notre critère de convergence peut être, en certains cas, le meilleur des critères connus, même s'il s'agit spécialement d'une série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

En effet, soient $a_0 = 0$, $b_n = 0$ et a_{i_n} le n-ième coefficient $a_\nu \neq 0$. Posons $i_n = [n^{\log n}]$ et

$$a_{i_n} = \frac{1}{\sqrt{n}\,(\log n)^{1+\varepsilon}}.$$

D'après le théorème que nous venons de démontrer, cette série est convergente presque partout. Les autres critères auxquels on pourrait encore penser, sont les suivants:

$$1^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log n < \infty,\text{[2]}$$

$$2^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} (\log n)^2 < \infty,\text{[3]}$$

$$3^0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log \lambda_n)^2 < \infty.\text{[4]}$$

Il est évident que les critères 1^0 et 2^0 ne sont pas applicables à la série considérée. Quant à 3^0, on voit qu'ayant posé $i_n = [n^{\log n}]$, on a[4] $\log n = O(\log \lambda_{i_n})$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log \lambda_n)^2 \geqq \text{const.} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log n)^2.$$

Cette série étant divergente, le critère 3^0 n'est applicable non plus.

(Reçu le 23 novembre 1948)

---

[2]) A. Kolmogoroff—G. Seliverstoff, Sur la convergence des séries de Fourier, *Comptes rendus Paris,* **178** (1924), p. 303—306; A. Plessner, Über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal für Math.*, **155** (1925), p. 15—25.

[3]) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen,* **87** (1922), p. 112—138; D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie. La convergence), *Fundamenta Math.,* **4** (1923), p. 82—105.

[4]) Voir la note précédente.