Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski—Hajós.

Von L. RÉDEI in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Den berühmten Satz von MINKOWSKI—HAJÓS[1]) spreche ich in einer neuen, möglichst knappen und sehr eleganten Form folgendermaßen aus, wobei der Satz als eine Struktureigenschaft der reellen Zahlen erscheint:

Satz 1. *Bezeichne* R_n $(n \geqq 1)$ *den Modul aller reellen Vektoren* $(x) = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ *mit der (gewöhnlichen) Addition* $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$. *Wenn für einen Untermodul* $\mathfrak{U}$ *von* R_n *in jeder Restklasse von* $R_n/\mathfrak{U}$ *genau ein Element* (x) *mit*

(1) $$0 \leqq x_i < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

liegt, so liegt mindestens ein Element $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *in* $\mathfrak{U}$.

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß* $\mathfrak{U}$ n *Basisvektoren hat, die untereinander geschrieben nach passender Numerierung der* x_i *eine kanonische Matrix bilden;* so nennen wir eine Matrix (mit n Zeilen und Spalten)

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

die nämlich in der Hauptdiagonale lauter 1 und darüber lauter 0 enthält.

Der Satz hat eine ganze Reihe äquivalente Formen. Die drei bekanntesten beziehen sich auf Diophantische homogene lineare Ungleichungen, raumzerlegende Würfelgitter, bzw. endliche Abelsche Gruppen; das sind wichtige Sätze von sehr verschiedenen Gebieten, die wir später unten formulieren und sie bzw. mit Satz 1a, 1b, 1c bezeichnen werden (s. §§ 2, 3 bzw. 9).

Satz 1 hat zuerst MINKOWSKI in der Form 1a (§2), später auch in der Form 1b (§3) als Vermutung ausgesprochen, ihn aber zu beweisen umsonst versucht, obwohl er auf ihn einen großen Wert gelegt

[1]) G. HAJÓS, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Zeitschrift*, 47 (1941), S. 427—467.

hat[2]). Nach seinem Tod haben sich viele Autoren[3]) mit dem Problem beschäftigt, der Gesamterfolg war aber bloß die Erledigung der Fälle $n \leqq 9$, als endlich HAJÓS[1]) dem Satz die überraschende, an sich sehr wichtige Form 1c (§9) gab und ihn so bewies.

HAJÓS knüpft sienen Beweis unmittelbar auf die (geometrische) Form 1b des Satzes an und gliedert ihn in die folgenden drei Teile:

Teil 1. Zurückführung von Satz 1b auf den Fall „rationaler" Würfelgitter.

Teil 2. Beweis der Äquivalenz mit dem gruppentheoretischen Satz 1c.

Teil 3. Beweis des letzteren Satzes.

Das Studium des Satzes von MINKOWSKI—HAJÓS ist durch den großen Umfang und die Kompliziertheit des Beweises von HAJÓS sehr mühsam. Der Schwerpunkt des Beweises liegt auf Teil 3, den ich[4]) neulich ganz kurz gestaltet habe. Gleichzeitig gelang mir auch Teile 1, 2 wesentlich zu vereinfachen, wie das in dieser Arbeit steht; beide Arbeiten zusammen enthalten somit den vollständigen Beweis des Satzes von MINKOWSKI—HAJÓS. (Es schien mir gut, die Arbeit [4]) getrennt zu veröffentlichen, um auch hiermit den selbständigen Charakter vom Satz 1c hervorzuheben.)

Vollständigkeitshalber lasse ich diese Arbeit auch auf den Beweis der Äquivalenz der Sätze 1a, 1b erstrecken, den MINKOWSKI meines Wissens nur für $n=3$ ausgearbeitet hat. Die Äquivalenz von Satz 1 mit (der Form 1b von) dem Minkowski—Hajósschen Satz wird sich mit wenig Mühe auch herausstellen.

Wie auch schon oben dem Satz 1, so werde ich den Sätzen 1a, 1b, 1c je einen „Zusatz" beifügen, der jedesmal eine verschärfte Form des betreffenden Satzes ausdrückt und so seine wahre Natur spiegelt. Die Zusätze von den Sätzen 1a, 1b sind bekannt und bilden einen organischen Teil des Beweises.

Beide Arbeiten (nämlich die vorliegende und [4])) bringen neben der

---

[2]) S. hierüber MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1910), S. 105.

[3]) S. die historischen Angaben in der Einleitung der Arbeit [1]) von HAJÓS. Zum am Ende dieser Hajósschen Arbeit stehenden Literaturverzeichnis tritt noch als weitere Literatur hinzu:

PH. FURTWÄNGLER, Über Gitter konstanter Dichte, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **43** (1936), S. 281—288. (Hier versucht FURTWÄNGLER den damals noch unbewiesenen Satz von MINKOWSKI—HAJÓS auf die Frage der „mehrfachen Bedeckung von R_n mit einem Würfelgitter" zurückzuführen, ein Weg, der ebenfalls nach HAJÓS [1]) für ein allgemeines n ungangbar ist.)

N. HOFREITER, Gitterförmige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1941), S. 48–64. (Diese Arbeit enthält den Beweis des Minkowski—Hajósschen Satzes für $n=1, \ldots, 9$.)

[4]) L. RÉDEI, Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, erscheint demnächst in den *Commentarii Math. Helvetici.*

erstrebten Vollständigkeit nur wenig sachlich neues, dagegen viele inhaltliche und formale Vereinfachungen; wodurch der Satz von MINKOWSKI—HAJÓS ganz leicht zugänglich geworden ist. In einer anderen Arbeit beabsichtige ich auf den Satz zurückzukommen, wobei ich mich unter anderem mit weiteren Äquivalenten und Anwendungen beschäftigen will, wofür die Grundlagen teils schon hier niedergelegt werden. Ich möchte hier auch auf eine überraschende Äquivalente des Satzes aufmerksam machen, die FÁRY neulich gefunden hat[5].

§ 2. Satz 1a über Diophantische Ungleichungen.

Wir schicken voraus: Bezeichnet A die Koeffizientenmatrix von n homogenen Linearformen $L_i(x)$ mit den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ und werden die letzteren einer homogenen linearen Substitution mit der Koeffizientenmatrix B unterworfen, so haben die neuen Formen L_i' die Koeffizientenmatrix AB. Hat dabei das untenfolgende System (3) keine ganzzahlige Lösung außer $x_1 = \ldots = x_n = 0$, so gilt ähnliches auch für L_i' (statt L_i) immer, wenn B ganzzahlig und unimodular ist; unimodular nennen wir eine (quadratische) Matrix mit der Determinante ± 1.

Satz 1 hat MINKOWSKI als Vermutung in folgender Form ausgesprochen:

S a t z 1a. *Es seien $L_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ reelle homogene Linearformen der $x_1, \ldots, x_n$ mit der Determinante ± 1. Wenn das System der Ungleichungen*

$$|L_i(x)| < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

keine ganzzahlige Lösung außer $x_1 = \ldots = x_n = 0$ hat, so ist mindestens ein $L_i(x)$ ganzzahlig.

Z u s a t z. *Aus der Annahme folgt sogar, daß die $L_i(x)$ bei passender Anordnung eine Koeffizientenmatrix AE haben, wobei A eine kanonische Matrix* (2) *und E eine ganzzahlige unimodulare Matrix bezeichnet.*

B e m e r k u n g. Diese „scharfe" Form von Satz 1a läßt sich trivial umkehren, denn nach obigem darf der Faktor E weggelassen werden, nach dem dann zu (3) eine Matrix (2) gehört, und dann muß für eine ganzzahlige Lösung offenbar (der Reihe nach) $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ gelten. Man bemerke auch, daß (3) gewiss noch eine ganzzahlige Lösung hat, wenn in ihm ein beliebiges „$<$" durch „$\leqq$" ersetzt wird — das ist eben ein Fundamentalsatz von MINKOWSKI, der später auch noch zur Anwendung kommen wird. Nach Minkowskis Terminologie bilden die L_i einen „Grenzfall" (seines Fundamentalsatzes), wenn die Voraussetzungen vom Satz 1a erfüllt sind, und so ist der Inhalt von diesem Satz 1a (nebst

[5]) I. FÁRY, Der Äquivalente des Minkowski—Hajósschen Satzes in der Theorie der topologischen Gruppen, erscheint demnächst in den *Commentarii Math. Helvetici.*

Zusatz und der gesagten Umkehrung) im wesentlichen die Bestimmung aller „Grenzfälle".

Die Äquivalenz der Sätze 1, 1a zeigen wir erst im § 6; hier beweisen wir zunächst bloß, daß aus Satz 1a der Zusatz folgt.

Für $n=1$ ist das richtig. Im falle $n \geqq 2$ setzen wir die Richtigkeit der Behauptung für $n-1$ statt n voraus. Man darf annehmen, daß eben $L_1(x)=c_1(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)$ gilt mit ganzem c_1 (>0) und ganzen, teilerfremden $a_1,\ldots,a_n$. Bekanntlich lassen sich die $a_1,\ldots,a_n$ durch Hinzunahme weiterer Zeilen zu einer ganzzahligen unimodularen Matrix ergänzen. Hieraus folgt, daß die $L_i(x)$ durch eine geeignete ganzzahlige unimodulare homogene lineare Substitution der Variabeln x_i in gewisse Formen $L_i(x)=L_i'(y)=L_i'(y_1,\ldots,y_n)$ mit $L_i'(y)=c_1y_1$ übergehen. Dabei bleiben die Voraussetzungen vom Satz 1a auch für die L_i' (statt L_i) erfüllt, und so gilt noch mehr, daß

$$(4) \qquad |L_i'(0,y_2,\ldots,y_n)|<1 \qquad (i=2,\ldots,n)$$

keine ganzzahligen Lösungen außer $y_2=\ldots=y_n=0$ hat. Dabei ist der Absolutwert der Determinante der $n-1$ Formen in (4) gleich $\frac{1}{c_1}$, und so muß nach obigem Fundamentalsatz notwendig $\frac{1}{c_1}\geqq 1$ sein, woraus $c_1\leqq 1$, also $c_1=1$ folgt. Andererseits folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß die Koeffizientenmatrix dieser $n-1$ Formen gleich A_1E_1 ist, wobei A_1, E_1 je eine kanonische bzw. ganzzahlige unimodulare Matrix bezeichnet, diesmal für $n-1$ statt n. Aus beiden ergibt sich, daß die Koeffizientenmatrix der $L_i'(y)$ gleich dem Produkt

$$(5) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c_2 & \\ \vdots & A_1 \\ c_n & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & E_1 \end{array}\right)$$

ist, wobei 1, $c_2,\ldots,c_n$ die Koeffizienten von y_1 in den $L_i'(y)$ sind. Der erste und zweite Faktor in (5) ist kanonisch bzw. ganzzahlig unimodular. Einem ähnlichen Produkt ist dann auch die Koeffizientenmatrix der $L_i(x)$ gleich, denn beide Koeffizientenmatrizen unterscheiden sich nach obigem nur in einem rechtsseitigen ganzzahligen unimodularen Faktor. Das beweist die Richtigkeit des Zusatzes von Satz 1a (wenn nur selbst Satz 1a richtig ist).

§ 3. Satz 1b über raumzerlegende Würfelgitter.

Fortan fassen wir R_n auch als einen n-dimensionalen Raum auf ausgestattet mit Euklidischer Metrik, und entsprechend nennen wir die Vektoren $\mathfrak{x}=(x)$ auch die Punkte des R_n, insbesondere heißen $0=(0,\ldots,0)$ und $\mathfrak{e}_1=(1,\ldots,0),\ldots,\mathfrak{e}_n=(0,\ldots,1)$ auch Anfangspunkt bzw. Einheitspunkte (-vektoren). Die allereinfachsten Grundbegriffe der n-dimensionalen Geometrie, insbesondere der Theorie der konvexen Körper, setzen wir als bekannt voraus.

$V(\mathfrak{K})$ bezeichnet das Volumen eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$.

$\mathfrak{W}$ bezeichnet den Würfel $0 \leq x_i \leq 1$. Dies hat 0 zur Ecke und die n Kantenvektoren $\mathfrak{e}_i$. Es gilt $V(\mathfrak{W}) = 1$.

Einen Untermodul $\mathfrak{P}$ von R_n nennen wir ein Punktgitter, wenn seine Punkte in keiner Hyperebene (d. h. in keiner $n-1$-dimensionalen Ebene) liegen und $\mathfrak{P}$ keinen Häufungspunkt (im Endlichen) hat.

$\mathfrak{N}$ bezeichnet das „natürliche" Punktgitter, bestehend aus allen ganzzahligen Punkten, die wir kurz Gitterpunkte (-vektoren) nennen. Es ist bekannt, daß die sämtlichen Punktgitter nichts anderes sind als die durch eine nicht ausgeartete Zentroaffinität erzeugten Bilder von $\mathfrak{N}$ („Zentroaffinität" heißt eine Affinität mit dem Fixpunkt 0). Mit anderen Worten, die Punktgitter stimmen mit den durch n Punkte erzeugten Untermoduln von R_n überein, die in keiner Hyperebene durch 0 liegen; diese n Punkte (Vektoren) bilden eine Basis des Punktgitters. Die Punktgitter $\mathfrak{P}$ lassen sich auf bekannte Weise auch durch ein (n-dimensionales) Parallelotop $\mathfrak{K}$ angeben, das nämlich 0 zur Ecke hat und dessen von 0 ausgehenden Kantenvektoren eine Basis von $\mathfrak{P}$ bilden; dann heißt $\mathfrak{K}$ ein Grundparallelotop (oder Basisparallelotop) von $\mathfrak{P}$. Rückwärts ist $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{P}$ nicht eindeutig bestimmt, aber $V(\mathfrak{K})$ hängt nur von $\mathfrak{P}$ ab; deshalb nennen wir $V(\mathfrak{K})$ die Invariante von $\mathfrak{P}$ und bezeichnen es mit $I(\mathfrak{P})$. (Offenbar haben die und nur die Punkgitter dieselbe Invariante, die durch eine volumentreue Affinität ineinander überführbar sind.)

Für einen Punkt $\mathfrak{x}\,(\in R_n)$ und eine Punktmenge $\mathfrak{H}\,(\subseteq R_n)$ bezeichnet $\mathfrak{x}+\mathfrak{H}$ die Verschiebung von $\mathfrak{H}$ um $\mathfrak{x}$, d. h. die Menge aller Punkte $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ $(\mathfrak{y}\in\mathfrak{H})$. (Ist $\mathfrak{H}$ ein Modul, so ist $\mathfrak{x}+\mathfrak{H}$ eine Restklasse von $R_n/\mathfrak{H}$.)

Für einen Untermodul $\mathfrak{U}$ von R_n und eine Punktmenge $\mathfrak{H}$ bezeichnet $\mathfrak{U}+\mathfrak{H}$ die Menge (nicht die Vereinigungsmenge) aller Punktmengen $\mathfrak{x}+\mathfrak{H}$ $(\mathfrak{x}\in\mathfrak{U})$. Ist dabei $\mathfrak{H}=\mathfrak{K}$ ein (konvexer) Körper, so nennen wir $\mathfrak{U}+\mathfrak{K}$ kurz einen Körpermodul; von besonderer Wichtigkeit wird der Fall sein, in dem $\mathfrak{U}=\mathfrak{P}$ ein Punktgitter ist, dann nennen wir $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ ein Körpergitter. (In Speziälfällen von $\mathfrak{K}$ dürfen wir z. B. über Parallelotop- und Würfelmoduln bzw. -gitter sprechen.)

Insbesondere nennen wir $\mathfrak{N}+\mathfrak{W}$ gelegentlich das natürliche Würfelgitter. Dieses entsteht auch so, daß man den Raum mit allen Hyperebenen $x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ schneidet $(i = 1, \ldots, n)$.

D e f i n i t i o n 1. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ (endlich oder unendlich viele) konvexe Körper paarweise ohne gemeinsamen inneren Punkt und mit der Vereinigungsmenge $\mathfrak{H}$, so nennen wir die $\mathfrak{K}_i$ eine Zerlegung von $\mathfrak{H}$; ist dabei $\mathfrak{H} = R_n$, so nennen wir die $\mathfrak{K}_i$ raumzerlegend.

Als raumzerlegende Körpelmoduln $\mathfrak{U}+\mathfrak{K}$ können nur Körpergitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ in Frage kommen, und eine weitere Vorbedingung ist offenbar, daß $I(\mathfrak{P})=V(\mathfrak{K})$ gilt. Für die erste Behauptung ist nämlich klar, daß die Punkte von $\mathfrak{U}$ nicht in einer Hyperebene liegen dürfen, auch darf $\mathfrak{U}$ keinen Häufungspunkt haben.

Die in der Einleitung erwähnte, ebenfalls von MINKOWSKI vermutete Form 1b von Satz 1 bezieht sich in seiner vollen Allgemeinheit auf die raumzerlegenden Parallelotopgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$. Da aber die raumzerlegende Eigenschaft erhalten bleibt, wenn $\mathfrak{K}$ einer Verschiebung oder $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ einer nicht ausgearteten Zentroaffinität unterworfen wird, so kann man sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit z. B. auf den Fall $\mathfrak{K}+\mathfrak{W}$ beschränken. Dann lautet die genannte Form 1b von Satz 1 so:

Satz 1b. *Es bezeichne $\mathfrak{P}$ ein Punktgitter. Ist das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend, so enthält $\mathfrak{P}$ einen Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$.* (Das bedeutet, daß es zwei Würfel in $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ gibt, die eine gemeinsame Seitenfläche, d. h. $n-1$-dimensionale Seite haben, wofür man kurz sagt, daß das Würfelgitter „gesäult" ist.)

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß $\mathfrak{P}$ nach passender Numerierung der Koordinaten x_i n solche Basisvektoren hat, die die Zeilen einer kanonischen Matrix (2) ausmachen.* (Offenbar entsteht dann $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ so, daß man R_n zunächst mit den Hyperebenen $x_n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ schneidet und die so erhaltenen „Parallelschichten" auf passende Art weiter in Würfel zerlegt, weshalb man sagt, daß das Würfelgitter „geschichtet" ist. Dabei müssen die in der Hyperebene $x_n=0$ liegenden Seitenflächen von den Elementen der „Würfelschicht" zwischen den Hyperebenen $x_n=0, 1$ wieder ein raumzerlegendes Würfelgitter von R_{n-1} ausmachen, und die verschiedenen „Würfelschichten" entstehen auseinander durch Verschiebungen um $i\mathfrak{a}_n$ $(i=0, \pm 1, \ldots)$, wobei $\mathfrak{a}_n$ der n-te Basisvektor von $\mathfrak{P}$ is. Durch fortgesetzte Anwendung für $n, n-1, \ldots, 2$ gewinnt man einen vollen Einblick in den „Aufbau" der raumzerlegenden Würfelgitter.)

Die Äquivalenz der Sätze 1a, 1b zeigen wir erst im § 4, hier zeigen wir bloß, daß aus Satz 1b der Zusatz folgt.

Für $n=1$ ist das klar. Im Falle $n \geqq 2$ setzen wir die Behauptung für $n-1$ statt n voraus. Man darf annehmen, daß eben $\mathfrak{e}_1 \in \mathfrak{P}$ gilt. Bilden wir R_n auf die Hyperebene $x_1=0$ ab, die ein R_{n-1} ist, so daß wir jedem Punkt (x) den Punkt $(0, x_2, \ldots, x_n)$ entsprechen lassen. Bezeichne $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{W}_1$ das Bild von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{W}$. Es ist klar, daß $\mathfrak{P}_1$ ein Untermodul von R_{n-1} ist, weiter ist $\mathfrak{W}_1$ der durch $x_1=0$, $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i=2, \ldots, n)$ definierte Würfel in R_{n-1}. Somit ist das Bild $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{W}_1$ von $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ ein Würfelmodul in R_{n-1}. Andererseits läßt sich $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ in Klassen einteilen, so daß man eine Klasse jedesmal mit einem festen $\mathfrak{x}\,(\in\mathfrak{P})$ aus den Würfeln $(\mathfrak{x}+k\,\mathfrak{e}_1)+\mathfrak{W}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ bildet. Die Punkte aller Würfel dieser Klasse werden auf einen und denselben Würfel $\mathfrak{x}_1+\mathfrak{W}_1$ abgebildet, wobei nämlich $\mathfrak{x}_1$ das Bild von $\mathfrak{x}$ ist; es ist auch klar, daß zwei solche $n-1$-dimensionale Würfel, wenn sie verschiedenen Klassen entsprechen, keinen inneren Punkt gemeinsam haben. Folglich ist $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{W}_1$ raumzerlegend (in R_{n-1}), woraus auch folgt, daß (der Modul $\mathfrak{P}_1$ ein Punktgitter, d. h.) $\mathfrak{P}_1+\mathfrak{W}$ ein raumzerlegendes Würfelgitter in R_{n-1} ist. Nach der Voraussetzung hat dann $\mathfrak{P}_1$ eine Basis von der Form

$$\mathfrak{b}_1=(0,1,0,\ldots,0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{b}_{n-1}=(0,a_{n-1,1},\ldots,1).$$

Jedes $\mathfrak{b}_i$ ist das Bild von einem $\mathfrak{a}_i$ $(\in\mathfrak{P})$, wobei dann $\mathfrak{a}_i$ sich nur in der ersten Koordinate von $\mathfrak{b}_i$ unterscheidet. Bezeichne $\mathfrak{Q}$ das durch $\mathfrak{e}_1,\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{n-1}$ erzeugte Punktgitter des R_n. Offenbar gilt $\mathfrak{Q}\subseteq\mathfrak{P}$, $I(\mathfrak{Q})=I(\mathfrak{P})=1$ und dies ist bekanntlich nur mit $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}$ verträglich. Da also $\mathfrak{e}_1,\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{n-1}$ Basisvektoren von $\mathfrak{P}$ sind und sie eine kanonische Matrix bilden, so haben wir bewiesen, daß aus Satz 1b der angefügte Zusatz folgt.

§ 4. Beweis der Äquivalenz der Sätze 1a, 1b.

Wir zeigen, daß Satz 1a mit Satz 1b äquivalent ist. Die Voraussetzung von Satz 1a läßt sich so aussagen, daß das Parallelotop

$$|L_i(x)|\leqq 1 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

keinen Gitterpunkt $(\neq 0)$ im Innern enthält. Da dieses Parallelotop das Volumen 2^n hat, so bedeutet das Gesagte, nach einem bekannten Satz von Minkowski, eben, daß das aus dem durch

$$|L_i(x)|\leqq\frac{1}{2} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

definierten Parallelotop $\mathfrak{K}$ entspringende Parallelotopgitter $\mathfrak{N}+\mathfrak{K}$ raumzerlegend ist. Daran wird nichts geändert, wenn man $\mathfrak{K}$ von vornherein durch

$$0\leqq L_i(x)\leqq 1 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

definiert, denn das bewirkt bloß eine Verschiebung von $\mathfrak{N}+\mathfrak{K}$. Auch darf $\mathfrak{N}+\mathfrak{K}$ der Affinität

$$y_i=L_i(x) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{6}$$

unterworfen werden, wobei (y) das Bild von (x) ist. Dabei geht $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{N}$ in ein Punktgitter $\mathfrak{P}$ über. Nach obigem haben wir gewonnen, daß sich Satz 1a (mit Berücksichtigung des Zusatzes) so aussprechen läßt: Ist das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend, so haben die $L_i(x)$ bei passender Anordnung eine Koeffizientenmatrix AE, wobei A, E eine kanonische bzw. ganzzahlige unimodulare Matrix bezeichnet.

Setzt man in (6) der Reihe nach $(x) = \mathfrak{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ein, so liefern die (y) eine Basis von $\mathfrak{P}$, diese besteht dann nach obigem aus den Spaltenvektoren von AE, d. h. aus den Zeilenvektoren von $E'A'$ (bei Matrizen bezeichnet der Strich „′" die Spiegelung an der Hauptdiagonale). Das Auftreten des (linksseitigen) Faktors E' bewirkt bloß eine Basistransformation (von $\mathfrak{P}$), und ist somit unwesentlich. Weiter hat A' die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies unterscheidet sich von einer kanonischen Matrix bloß in der Reihenfolge der Zeilen und (der Koordinanten, d. h.) der Spalten, worauf es nicht ankommt, und so spricht sich Satz 1a nach obigem so aus: Ist $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ raumzerlegend, so hat $\mathfrak{P}$ eine Basis bestehend aus den Zeilenvektoren einer kanonischen Matrix. In der Tat stimmt dies mit dem (durch seinen Zusatz verschärften) Satz 1b überein. Bedenkt man noch, daß in Satz 1a eben diejenigen $L_i(x)$ zu berücksichtigen waren, für die die Affinität (6) unimodular ist, d. h. für die $I(\mathfrak{P}) = 1$ ausfällt, und daß andererseits auch im Satz 1b eben nur alle $\mathfrak{P}$ mit $I(\mathfrak{P}) = 1$ in Frage kommen, so hat man die behauptete Äquivalenz der Sätze 1a, 1b bewiesen.

§ 5. Halboffene Polyeder.

Die im folgenden einzuführenden „halboffenen" Polyeder scheinen in der Theorie der konvexen Körper im allgemeinen gut verwendbar zu sein. In dieser Arbeit werden davon nur die halboffenen Parallelotope zur Anwendung kommen. Zunächst definieren wir:

Definition 2. Man sage, daß die (endlich oder unendlich vielen) Punktmengen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ eine Punktmenge $\mathfrak{H}$ schlicht überdecken, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ in genau einem $\mathfrak{H}_i$ liegt.

Man bemerke, daß die $\mathfrak{H}_i$ mit $\mathfrak{H}$ zusammen auch jede Teilmenge von $\mathfrak{H}$ schlicht überdecken.

Für uns wird ein wichtiges Beispiel eine (volle) Schar paralleler Geraden, diese überdeckt den Raum schlicht.

Definition 3. Bezeichne $\mathfrak{K}$ einen konvexen Körper mit inneren Punkten und durchlaufe g alle Elemente einer gerichteten parallelen Geradenschar, die zu keiner Seitenfäche von $\mathfrak{K}$ parallel ist. Man nehme alle (gerichteten) Strecken, die beim Schneiden von g durch $\mathfrak{K}$ entstehen, behalte von den beiden Endpunkten nur den Anfangspunkt und bilde die Vereinigungsmenge $\overline{\mathfrak{K}}$ dieser halboffenen Strecken. Man nenne $\overline{\mathfrak{K}}$ ein halboffenes Polyeder.

Bemerkung. Man könnte in dieser Definition auch den Fall von zu einer Seitenfläche von $\mathfrak{K}$ parallelen Geradenscharen zulassen, indem dann die Grenzpunkte von $\bar{\mathfrak{K}}$ mit je einer passenden Multiplizität $\frac{1}{2^k}$ versieht ($k=0, 1, \ldots$), so daß dabei der unten folgende Satz 2 gültig bleibt. Auch könnte man die Definition auf die nichtkonvexen Polyeder erstrecken.

Zu jedem $\mathfrak{K}$ gehören endlich viele halboffene Polyeder $\bar{\mathfrak{K}}$; umgekehrt wird durch $\bar{\mathfrak{K}}$ ein $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt.

Insbesondere entstehen aus einem Parallelotop $\mathfrak{K}$ alle halboffenen Parallelotope $\bar{\mathfrak{K}}$ offenbar auch so, daß man von der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ alle Seitenflächen entfernt, die einer festen Ecke von $\mathfrak{K}$ gegenüberliegen[6]; ihre Zahl ist somit 2^n, jedes von ihnen ist durch $\mathfrak{K}$ und seine (einzige) Ecke eindeutig bestimmt.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Punktgitter oder ein Untermodul von R_n und $\bar{\mathfrak{K}}$ ein halboffenes Polyeder, so nennen wir $\mathfrak{P}+\bar{\mathfrak{K}}$ ein halboffenes Polyedergitter bzw. einen solchen Polyedermodul und beweisen den folgenden

Satz 2. *Ist das Polyedergitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ raumzerlegend, so überdeckt jedes halboffene Polyedergitter $\mathfrak{P}+\bar{\mathfrak{K}}$ den Raum schlicht.*

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 2 ist trivial auch richtig. In dieser Arbeit wird Satz 2 bloß die Rolle eines Hilfssatzes erfüllen, aber er scheint uns mit Recht ein „Satz" genannt werden zu dürfen[7].

Zum Beweis von Satz 2 betrachte man eine gerichtete Gerade g, die zu keiner Seitenfläche von $\mathfrak{K}$ parallel ist. Schneidet man g mit den Polyedern des $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$, so entsteht eine Zerlegung von g in gerichtete Strecken. Die aus ihnen mit dem Beibehalten des Anfangspunktes entstandenen halboffenen Strecken überdecken g offenbar schlicht. Berücksichtigt man gleichzeitig alle Elemente der zu g parallelen und gleichgerichteten Geradenschar, so überdecken die so entstandenen halboffenen Strecken den Raum schlicht. Faßt man also jedesmal diejenigen halboffenen Strecken zusammen, die einem Polyeder von $\mathfrak{P}+\mathfrak{K}$ angehören und bildet ihre Vereinigungsmenge, so bekommt man wieder eine schlichte Überdeckung von R_n. Andererseits sind diese Vereinigunsmengen nach Definition 3 eben die Elemente eines halboffenen Polyedergitters $\mathfrak{P}+\bar{\mathfrak{K}}$; dabei darf $\bar{\mathfrak{K}}$ beliebig gewählt werden, denn das kommt bloß auf die passende Wahl von g an. Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

---

[6] Das ist die übliche Definition der halboffenen Parallelotope.

[7] Insbesondere für ein Parallelotop $\mathfrak{K}$ kommt Satz 2 auch bei früheren Autoren vor, aber einem Beweis konnte ich in der Literatur nicht auf die Spur kommen. Mir scheint, daß der oben folgende Beweis auch für diesen Spezialfall der denkbar einfachste ist. Übrigens ließe sich Satz 2 für jede (nicht nur „gitterförmige") Zerlegung des Raumes verallgemeinern ohne eine Änderung des Beweises.

§ 6. Beweis der Äquivalenz der Sätze 1, 1b.

Hier verwenden wir Satz 2 zunächst, um die Äquivalenz der Sätze 1, 1b nachzuweisen. Man kann Satz 1b wegen Satz 2 so aussprechen: Überdeckt das halboffene Würfelgitter $\mathfrak{P}\dotplus\overline{\mathfrak{W}}$ den Raum schlicht, so enthält $\mathfrak{P}$ einen Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$. Die Voraussetzung dieses Satzes besagt, daß jeder Punkt von R_n eindeutig in der Form $\mathfrak{a}+(x)$ $(\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}$, $(x)\in\overline{\mathfrak{W}})$ schreiben läßt. Dabei war gleichgültig, welchen der zu $\mathfrak{W}$ gehörigen halboffenen Würfel $\overline{\mathfrak{W}}$ man gewählt hat; stillschweigend definieren wir $\overline{\mathfrak{W}}$ immer durch (1) (so daß also $\overline{\mathfrak{W}}$ die Ecke 0 enthält). Dann lautet die vorige Voraussetzung so: In jeder Restklasse von $R_n/\mathfrak{P}$ liegt ein einziger Punkt (x) mit der Eigenschaft (1). Dies stimmt mit der Voraussetzung von Satz 1 überein, denn in diesem Satz 1 kommt offenbar nur ein solcher Untermodul $\mathfrak{U}$ von R_n in Frage, der ein Punktgitter ist. In der Tat ist also Satz 1b äquivalent mit Satz 1.

Aus dem Zusatz von Satz 1b folgt dann auch der Zusatz von Satz 1.

Zusammenfassend haben wir bisher bewiesen, daß alle drei Sätze 1, 1a, 1b äquivalent sind und aus ihnen auch die ihnen angefügten Zusätze folgen.

§ 7. Zurückführung von Satz 1b auf rationale Würfelgitter.

Als Vorbereitung zeigen wir: Ist U ein durch endlichviele Elemente erzeugter Untermodul der reellen Zahlen mit mindestens einem irrationalen Element, so zerlegt sich U in eine direkte Summe

$$U=U_0\dotplus(\vartheta) \tag{7}$$

von zwei Untermoduln U_0, (ϑ), wobei U_0 alle rationalen Elemente von U enthält, ϑ eine irrationale Zahl ist und (ϑ) den aus allen $i\vartheta\,(i=0,\pm1,\ldots)$ bestehenden „eingliedrigen" Modul bezeichnet.

Bekanntlich läßt sich nämlich U in eine direkte Summe $U=U_1\dotplus\ldots\dotplus U_r$ $(r\geqq 1)$ von eingliedrigen Moduln U_i zerlegen. Hieraus folgt auch, daß der Untermodul aller rationalen Elemente von U eingliedrig oder 0 ist, und so läßt sich bekanntlich voraussetzen, daß U_1 alle rationalen Elemente von U enthält. Gewiß liegt in U_r kein rationales Element $(\neq 0)$, denn dann müßte $U_r=U_1$, also $r=1$, $U=U_1$ sein, und das ergibt den Widerspruch, daß ein eingliedriger Modul eine rationale Zahl $(\neq 0)$ und auch eine irrationale Zahl enthält. Folglich ist $U_0=U_1\dotplus\ldots\dotplus U_{r-1}$, $(\vartheta)=U_r$ eine gewünschte Lösung von (7).

Wir behaupten den folgenden[8]).

---

[8]) Hilfssatz 1 hat zuerst TH. SCHMIDT bewiesen (s. hierüber HAJÓS [1])). HAJÓS [1]) bewies einen allgemeineren Satz über „mehrfach raumbedeckende Würfelgitter"; obiger Beweis ist kürzer und gilt auch für diesen Hajósschen Satz.

Hilfssatz 1. *Ist Satz* 1b *für rationale Würfelgitter richtig, so ist er allgemein richtig.*

Betrachten wir ein nichtrationales Punktgitter $\mathfrak{P}$ mit den Elementen

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n), \tag{8}$$

wofür das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend ist. Man darf annehmen, daß eben der Modul U aller a_1 nicht rational ist. Dann gilt für U eine Darstellung (7), und so läßt sich (8) in der Form

$$\mathfrak{a} = (a + k\vartheta, a_2, \ldots, a_n) \qquad (a \in U_0,\ k = 0, \pm 1, \ldots) \tag{9}$$

schreiben, wobei a und k durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt sind.

Ersetzen wir ϑ durch eine reelle Variable t und schreiben dann $\mathfrak{a}(t)$ für $\mathfrak{a}$, so folgt aus dem gesagten sofort, daß auch die $\mathfrak{a}(t)$ bei jedem festen Wert $(\neq 0)$ von t einen Untermodul von R_n bilden, den wir entsprechend mit $\mathfrak{P}(t)$ bezeichnen.

Von dieser Bemerkung machen wir erst später Gebrauch, jetzt betrachten wir weiter das ursprüngliche $\mathfrak{P}$. Die $\mathfrak{a}$ in (9) mit festem k fassen wir in eine Menge $\mathfrak{P}_k$ zusammen; diese $\mathfrak{P}_k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ bilden eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{P}$.

Nach Satz 1 überdeckt $\mathfrak{P}+\overline{\mathfrak{W}}$ den Raum schlicht. Bezeichnet also h eine Gerade parallel zur x_1-Achse, so wird jedenfalls auch h durch $\mathfrak{P}+\overline{\mathfrak{W}}$ überdeckt. Das bedeutet, daß die Gerade h durch die sie schneidenden $\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{W}}$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{P})$ in lauter halboffene Strecken von der Länge 1 zerlegt wird, die nämlich h ebenfalls schlicht überdecken. Dann müssen die ersten Koordinaten a_1 in (8) der entsprechenden $\mathfrak{a}$ eine volle Restklasse mod 1 ausmachen. Die Differenz von zwei solchen a_1 ist dann also (ganz) rational. Nun ist nach (9) die Differenz der ersten Koordinaten von zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{P}_k$ gewiß von der Form $a_1 + k_1\vartheta$ $(a_1 \in U_0;\ k_1 \neq 0)$, also nach (7) jedenfalls nicht rational. Nach dem vorigen bedeutet dies, daß diejenigen $\mathfrak{a}$ $(\in \mathfrak{P})$ in eine feste Klasse $\mathfrak{P}_k$ gehören müssen, für die die Gerade h durch die zugehörigen $\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{W}}$ (schlicht) überdeckt wird.

Wenn man nun $\vartheta = t$ variieren läßt, so bedeutet für jedes $\mathfrak{P}_k$ nach (9) eine Änderung von t bloß eine Verschiebung parallel zur x_1-Achse, und so bleibt h durch die vorherbetrachteten $\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{W}}$ nach wie vor dieser Änderung schlicht überdeckt. Das bezieht sich auf alle Geraden h parallel zur x_1-Achse, und so haben wir bekommen, daß $\mathfrak{P}(t)+\overline{\mathfrak{W}}$ den Raum für jedes t $(\neq 0)$ schlicht überdeckt, d. h. $\mathfrak{P}(t)+\mathfrak{W}$ raumzerlegend ist. (Nebenbei bemerkt muß das aus Stetigkeitsgründen auch für $t=0$ gelten.) Aus diesem Resultat folgt auch, daß der Modul $\mathfrak{P}(t)$ notwendig ein Punktgitter sein muß.

Um endlich den Beweis von Hilfssatz 1 zu gewinnen, nehmen wir an, daß Satz 1b für das betrachtete $\mathfrak{P}$ falsch ist, d. h. daß $\mathfrak{P}$ kein $\mathfrak{e}$ enthält. Wegen der Annahme folgt aus Stetigkeitsgründen, daß es ein rationales t gibt, wofür $\mathfrak{P}(t)$ ebenfalls kein $\mathfrak{e}_i$ enthält. Da nun $\mathfrak{P}(t)+\mathfrak{W}$ raumzerlegend ist, so muß wegen der Voraussetzung des Satzes 1b $\mathfrak{P}(t)$ nichtrational sein, und dann läßt sich das Verfahren mit $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}(t)$ statt $\mathfrak{P}$ wiederholen. Es bestand aber dieses Verfahren darin, daß man das irrationale ϑ in (9) durch ein passendes rationales t ersetzt hat, und da die a_i in (8) bei jedem i einen durch endlich viele (nämlich durch höchstens n) Basiselemente erzeugbaren Modul bilden, so ist es klar, daß man in endlich vielen Schritten trotzdem bei einem rationalen Punktgitter ankommen muß. Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz 1.

§ 8. Zuordnung eines endlichen Moduls zu einem rationalen Punktgitter.

Eine überaus wichtige Wendung des Beweisverfahrens von Hajós besteht nun darin, daß man jedem rationalen Punktgitter $\mathfrak{P}$ einen endlichen Modul zuordnen kann, in dem sich die (uns interessierenden) Eigenschaften von $\mathfrak{P}$ glücklich spiegeln. Mit Beibehaltung seiner Grundideen verfahren wir viel kürzer und gruppieren die bezüglichen Tatsachen in leichterer Zusammenstellung in den unten folgenden Hilfssätzen 2, 3.

Wir fangen es mit folgender Definition an:

Definition 4. Ist M ein endlicher Modul ($\neq 0$) und sind $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ solche Elemente von M, daß die

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_n\alpha_n \qquad (k_i=0,\ldots,e_i-1\,;\ e_i\geqq 2,\ i=1,\ldots,n) \tag{10}$$

alle verschiedenen Elemente von M sind, so nennen wir die α_i ein Hajóssches System (für M).

In diesem Paragraphen bezeichne $\mathfrak{Q}$ das (rationale „achsenparallele“) Punktgitter mit den n Basisvektoren

$$\mathfrak{t}_i=\frac{1}{e_i}\mathfrak{e}_i \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{11}$$

wobei die ganzen Zahlen $e_i(\geqq 2)$ beliebig sein dürfen.

Hilfssatz 2. *Zu jedem rationalen Punktgitter $\mathfrak{P}$ gibt es ein $\mathfrak{Q}\,(\supset\mathfrak{P})$. Man setze $M=\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}$,*

$$\alpha_i=\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}, \tag{12}$$

wobei dann M ein endlicher (Restklassen-) Modul und $\alpha_i\in M$ ist. Weiter gelten:

Dann und nur dann ist das Würfelgitter $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ raumzerlegend, wenn die α ein Hajóssches System bilden.

Dann und nur dann gilt $e_i \in \mathfrak{P}$, *wenn* $e_i \alpha_i = 0$ *ist.*

Hilfssatz 3. *Ist* M' *ein endlicher Modul mit dem Hajósschen Elementensystem* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *und den „zugehörigen Zahlen"* $e_1, \ldots, e_n$, *so gibt es einen Untermodul* $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{O}$, *wofür der Restklassenmodul* $M = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ *isomorph zu* M' *und dabei* $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{P}$ *und* α_i $(i = 1, \ldots, n)$ *je ein entsprechendes Elementenpaar ist.*

Da $\mathfrak{P}$ eine endliche Basis hat, so lassen sich die i-ten Koordinaten seiner Punkte mit einem Generalnenner e_i schreiben, wobei man $e_i \geqq 2$ annehmen darf, und so ist die erste Behauptung von Hilfssatz 2 richtig.

Man bezeichne mit $\mathfrak{R}$ das Parallelotop

$$0 \leqq x_i \leqq \frac{1}{e_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Aus (11) folgt, daß die Parallelotope

$$(k_1 \mathfrak{t}_1 + \ldots + k_n \mathfrak{t}_n) + \mathfrak{R} \qquad (k_i = 0, \ldots, e_i - 1\,;\; i = 1, \ldots, n)$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{W}$ bilden. Folglich ist $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ dann und nur dann raumzerlegend, wenn diejenigen $\mathfrak{x} + \mathfrak{R}$ eine Zerlegung von R_n bilden, in denen $\mathfrak{x}$ alle Elemente der Punktmengen

(13) $$(k_1 \mathfrak{t}_1 + \ldots + k_n \mathfrak{t}_n) + \mathfrak{P} \qquad (k_i = 0, \ldots, e_i - 1\,;\; i = 1, \ldots, n)$$

durchläuft. Andererseits ist $\mathfrak{R}$ ein Grundparallelotop von $\mathfrak{O}$, und so ist $\mathfrak{O} + \mathfrak{R}$ eine Zerlegung von R_n. Aus beiden folgt, daß $\mathfrak{P} + \mathfrak{W}$ dann und nur dann raumzerlegend ist, wenn die genannten $\mathfrak{x} + \mathfrak{R}$ (die ja alle in $\mathfrak{O} + \mathfrak{R}$ gehören) eben $\mathfrak{O} + \mathfrak{R}$ ausmachen, d. h. wenn die Punktmengen (13) paarweise fremd sind und $\mathfrak{O}$ zur Vereinigungsmenge haben. Mit anderen Worten heißt das, daß (13) alle verschiedenen Restklassen von $(M =)$ $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ liefert. Mit der Bezeichnung (12) nimmt (13) die Form (10) an, und so ist die Richtigkeit der zweiten Behauptung im Hilfssatz 2 bestätigt worden.

Wegen (11), (12) schreibt sich „$e_i \in \mathfrak{P}$" als „$e_i \mathfrak{t}_i \in \mathfrak{P}$", d. h. als „$e_i \alpha_i = 0$", womit wir Hilfssatz 2 bewiesen haben.

Zum Beweis vom Hilfssatz 3 bilde man $\mathfrak{O}$ homomorph auf M' ab, so daß man dem Element

$$k_1 \mathfrak{t}_1 + \ldots + k_n \mathfrak{t}_n \qquad (k_i = 0, \pm 1, \ldots;\; i = 1, \ldots, n)$$

von $\mathfrak{O}$ das Element

(16) $$k_1 \alpha_1 + \ldots + k_n \alpha_n$$

von M' zuordnet. Man bezeichne mit $\mathfrak{U}$ den Untermodul der auf die 0 abgebildeten Elemente. Dann besteht zwischen $\mathfrak{O}/\mathfrak{U}$ und M' eine Isomorphie, wobei $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{U}$ und α_i einander entsprechen $(i = 1, \ldots, n)$. Aus der Endlichkeit von M' folgt auch, daß $\mathfrak{U}$ ein (rationales) Punktgitter $\mathfrak{P}$ ist, womit wir Hilfssatz 3 bewiesen haben.

§ 9. Satz 1c von Hajós über die endlichen Abelschen Gruppen.

Aus den Hilfssätzen 1, 2, 3 wird leicht eine weitere äquivalente Form der Sätze 1, 1a, 1b entstehen, wobei es sich nur noch um einen endlichen Modul handeln wird. Das werden wir den Satz von HAJÓS nennen, der ihn aufgestellt und bewiesen hat; und diesen später unten (multiplikativ geschrieben) mit „Satz 1c" bezeichnen. Da nun Satz 1c insbesondere mit Satz 1 äquivalent ist, so wollen wir schon im voraus betonen, wie das interessant sei, daß sich die im Satz 1 ausgedrückte Struktureigenschaft des unendlichen Moduls R_n einer ebenfalls strukturellen Eingenschaft aller endlichen Moduln (Abelschen Gruppen) gleichkommt. Als eine zweite große Überraschung des ganzen Fragenkomplexes bleibt noch übrig, daß sich auch dieser scheinbar einfache („endliche") Satz 1c für sehr tiefliegend erwies.

Wir zeigen, daß Satz 1b mit folgender Behauptung **A** äquivalent ist (dieses **A** wird in multiplikativer Form eben der Satz 1c von Hajós, s. unten).

A. *Sind die*

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_n\alpha_n \qquad (k_i=0,\ldots,e_i-1\,;e_i\geqq 2\,;i=1,\ldots,n) \tag{14}$$

alle verschiedenen Elemente eines endlichen Moduls M, so gibt es ein α_i mit $e_i\alpha_i=0$.

Bemerkung. Wegen der Voraussetzung gilt $k_i\alpha_i \neq 0$ $(k_i=1,\ldots, e_i-1)$, und so bedeutet „$e_i\alpha_i=0$" dasselbe wie „α_i hat die Ordnung e_i". Nehmen wir zuerst an, daß **A** richtig ist. Dann folgt aus Hilfssatz 2 sofort die Richtigkeit von Satz 1b für jedes rationale Punktgitter $\mathfrak{P}$, also wegen Hilfssatz 1 auch allgemein.

Nehmen wir umgekehrt an, daß **A** falsch ist. Dann gibt es einen endlichen Modul M', für den die Voraussetzung von **A** (mit M' statt M) erfüllt ist, und $e_i\alpha_i \neq 0$ $(i=1,\ldots,n)$ gilt. Nach Hilfssatz 3 bestimme man ein rationales Punktgitter $\mathfrak{P}$ $(\subset\mathfrak{Q})$, so daß $M=\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}$ und M' isomorph sind und dabei $\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}$ und α_i $(i=1,\ldots,n)$ einander entsprechen. Hiernach überträgt sich das vorige auf $M=\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}$ so: Die $\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}$ bilden ein Hajóssches System (für M) und jedes $e_i\mathfrak{t}_i+\mathfrak{P}=\mathfrak{e}_i+\mathfrak{P}$ ist von der Hauptklasse $\mathfrak{P}$ verschieden $(i=1,\ldots,n)$. Wegen Hilfssatz 2 läßt sich statt dieses sagen: $\mathfrak{P}+\mathfrak{W}$ ist raumzerlegend und kein $\mathfrak{e}_i$ liegt in $\mathfrak{P}$ $(i=1,\ldots,n)$. Dies besagt, daß Satz 1b falsch ist, womit wir die Äquivalenz von Satz 1b und **A** bewiesen haben.

Um nunmehr **A** gleich eine elegante multiplikative Form zu geben (die sich auch dem Beweis gut anpaßt), vereinbaren wir uns in den folgenden.

Bezeichne G eine (multiplikative) endliche Abelsche Gruppe mit dem Einselement 1. Es werde stets $G \neq 1$ angenommen. Kleine griechische Buchstaben bezeichnen Elemente von G.

$O(x)$ bezeichne die Ordnung von x, wobei x ein Element oder eine Untergruppe von G sein darf.

Einen Komplex von der speziellen Form

$$[\alpha]_e = 1, \ \alpha, \ldots, \alpha^{e-1} \qquad (O(\alpha) \geqq e \geqq 2) \tag{15}$$

nennen wir ein (e-gliedriges) Simplex. Dabei sind also die Elemente $1, \ldots, \alpha^{e-1}$ stets verschieden (insbesondere muß $\alpha \neq 1$ sein). Es ist klar, daß das Simplex (15) dann und nur dann eine Gruppe ist, wenn $O(\alpha) = e$ gilt. Einfachheitshalber schreiben wir auch $[\alpha]$ für $[\alpha]_e$, wenn aber zwei $[\alpha], [\beta]$ nebeneinander verwendet werden, so soll das keineswegs bedeuten, daß die Gliederzahlen gleich sind.

Schreibt man nun (14) multiplikativ, so entsteht offenbar das Produkt der Komplexe $[\alpha_i] = [\alpha_i]_{e_i}$. Folglich lautet nach **A** und der diesem angefügten „Bemerkung" der schon oben angekündigte, mit Satz 1b äquivalente gruppentheoretische Satz von Hajós so:

Satz 1c. *Gilt für eine endliche Abelsche Gruppe G eine „Simplexzerlegung"*

$$G = [\alpha_1] \ldots [\alpha_n], \tag{16}$$

so ist einer der Faktoren eine Gruppe. (Man nenne (16) auch eine Hajóssche Zerlegung.)

Zusatz. *Aus der Annahme folgt sogar, daß bei passender Numerierung der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Ordung der durch die $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ erzeugten Gruppe gleich $e_1 \ldots e_i$ ist ($i = 1, \ldots, n$), wobei e_i die Gliederzahl von $[\alpha_i]$ bezeichnet.*

Bemerkung. Diese „scharfe" Form von Satz 1c läßt sich trivial umkehren. Der Zusatz (von Satz 1c) ließe sich sehr leicht beweisen, wir nehmen aber davon Abstand, weil wir uns mit ihm in einer anderen Arbeit ausführlich beschäftigen werden, wobei unter anderem eine weitere „Verschärfung" von Satz 1c entstehen wird.

Ich verweise wieder auf meine Arbeit[4]), deren einziger Inhalt der Beweis von Satz 1c ist, womit sich dann auch der Beweis der Sätze 1, 1a, 1b schließen wird.

(*Eingegangen am 10. November 1948.*)