Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte.

Von STEFAN FENYŐ in Budapest.

1. $M(x_1, \ldots, x_n)$ ist ein *Mittelwert* (oder eine Mittelwertfunktion, kurz ein Mittel), definiert im Bereich $a \leqq x_i \leqq b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wenn er den folgenden Bedingungen genügt:

a) $M(x_1, \ldots, x_n)$ ist stetig und streng monoton in sämtlichen Variabeln, d. h. es ist

$$|M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - M(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)| < \varepsilon \quad \text{falls } |\xi_k - x_k| < \delta$$

und

$$M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) < M(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \text{ falls } \xi_k < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

b) $M(x, x, \ldots, x) = x$;

c) M ist symmetrisch in seinen Variabeln;

d) $\min x_i < M(x_1, \ldots, x_n) < \max x_i$.

Im folgenden soll die Existenz der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung vorausgesetzt werden.

Ein Mittelwert wird *quasiarithmetisch* genannt, falls eine stetige und monotone Funktion $\Phi(x)$ existiert, so daß die Beziehung

$$M(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^{-1}\left\{\frac{\Phi(x_1) + \ldots + \Phi(x_n)}{n}\right\}$$

für sämtliche Werte x_i aus (a, b) zutrifft. Hier bedeutet Φ^{-1} die Umkehrfunktion von $\Phi(x)$. Diese Funktion $\Phi(x)$ wird die zu dem Mittel M gehörige K-N (KOLMOGOROFF—NAGUMO-) Funktion genannt[1]).

2. Die Mittelwerte

$$M^{(1)}(x_1, \ldots, x_n),\ M^{(2)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, M^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

seien gegeben und wir betrachten den folgenden Algorithmus, wobei

---

[1]) A. KOLMOGOROFF, Sur la notion de la moyenne, *Atti dell'Accademia dei Lincei, Rendiconti,* **12** (1930), pp. 388—391; M. NAGUMO, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journal of Math.,* **7** (1930), pp. 71—79.

$x_{10}=x_1, x_{20}=x_2, \ldots, x_{n0}=x_n$ beliebige Ausgangswerte bezeichnen ($a \leqq x_{i0} \leqq b$; $i=1, 2, \ldots, n$):

$$x_{ik}=M^{(i)}(x_{1,k-1}, x_{2,k-1}, \ldots, x_{n,k-1}) \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, n \\ k=1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} x_{ik}$$

für $i=1, 2, \ldots, n$ existieren, alle den gleichen Wert X haben, und daß die durch $M(x_1, \ldots, x_n)=X$ definierte Funktion eine Mittelwertfunktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Bereiche $a \leqq x_i \leqq b$ ist. Dieser Algorithmus wird als Mischalgorithmus der Mittelwerte $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n)}$ bezeichnet. Die durch den Mischalgorithmus gewonnene Funktion M ist offenbar die einzige Mittelwertfunktion, die eine Lösung der Funktionalgleichung[2])

$$(1) \quad M(x_1, \ldots, x_n)= \\ =M(M^{(1)}(x_1, \ldots, x_n);\ M^{(2)}(x_1, \ldots, x_n);\ \ldots;\ M^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)),$$

ist.

3. Nun wird die Frage gestellt, welchen Bedingungen die Mittelwerte $M^{(i)}$ unterworfen sein müssen, damit M quasiarithmetisch ist?

Ist M quasiarithmetisch, so gilt definitionsgemäß:

$$\Phi[M(x_1, \ldots, x_n)]=\frac{\Phi(x_1)+\ldots+\Phi(x_n)}{n}.$$

Andererseits gilt nach Gleichung (1):

$$\Phi[M(x_1, \ldots, x_n)]=\frac{\Phi[M^{(1)}]+\ldots+\Phi[M^{(n)}]}{n}.$$

Wir differenzieren die Gleichung

$$(2) \quad \Phi[M^{(1)}]+\ldots+\Phi[M^{(n)}]=\Phi(x_1)+\ldots+\Phi(x_n)$$

beiderseits zuerst nach x_i, dann nach x_j $(i\neq j)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$M^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)=M^{(k)};\quad \frac{\partial M^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}=M^{(k)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)=M^{(k)}_{x_i};$$

$$\frac{\partial^2 M^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}=M^{(k)}_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n)=M^{(k)}_{x_i x_j}$$

$$(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$$

---

[2]) Für analytische Mittelwerte s. G. Aumann, Über den Mischalgorithmus analytischer Mittelwerten, *Math. Zeitschrift*, **39** (1935), pp. 625—629. Für nichtanalytische Mittelwerte: I. Fenyő, *A középértékek elméletéről* (Inaugural-Dissertation, Budapest, 1945).

und gewinnen so

$$\Phi''[M^{(1)}]M^{(1)}_{x_i}M^{(1)}_{x_j}+\ldots+\Phi''[M^{(n)}]M^{(n)}_{x_i}M^{(n)}_{x_j}+$$
$$+\Phi'[M^{(1)}]M^{(1)}_{x_ix_j}+\ldots+\Phi'[M^{(n)}]M^{(n)}_{x_ix_j}=0.$$

Es sei nun $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, dann besteht wegen[3])

$$M^{(k)}_{x_i}(x,x,\ldots,x)=\frac{1}{n}$$

die Relation

$$\text{(3)} \qquad \Phi''(x)+n[M^{(1)}_{x_ix_j}(x,\ldots,x)+\ldots+M^{(n)}_{x_ix_j}(x,\ldots,x)]\,\Phi'(x)=0.$$

Wenn also die Funktion Φ existiert, dann soll sie der Differentialgleichung (3) genügen, d. h. soll

$$\Phi(x)=\int^{x}\exp\left\{-n\int^{\tau}[M^{(1)}_{x_ix_j}(t,\ldots,t)+\ldots+M^{(n)}_{x_ix_j}(t,\ldots,t)]\,dt\right\}d\tau=$$
$$=\int^{x}[f_1(\tau)f_2(\tau)\ldots f_n(\tau)]^{\frac{1}{n}}d\tau$$

sein, wo

$$\text{(4)} \qquad f_k(\tau)=\exp\left[-n^2\int^{\tau}M^{(k)}_{x_ix_j}(t,\ldots,t)\,dt\right] \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$E(x)=\sqrt[n]{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)}.$$

Da $\Phi'(x)=E(x)$, so folgt aus (2) offenbar

$$\text{(5)} \qquad E(M^{(1)})M^{(1)}_{x_i}+E(M^{(2)})M^{(2)}_{x_i}+\ldots+E(M^{(n)})M^{(n)}_{x_i}=E(x_i)$$

für $i=1,2,\ldots,n$.

Wir behaupten, daß die Bedingungen (5) zugleich hinreichend sind dafür, daß die Integralfunktion $\Phi(x)$ von $E(x)$ die K-N-Funktion des Mittelwertes M ist.

Es folgt nämlich aus (5) für die Funktion

$$d(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(M^{(1)})+\ldots+\Phi(M^{(n)})-\Phi(x_1)-\ldots-\Phi(x_n),$$

daß

$$\frac{\partial d}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

also ist $d(x_1,\ldots,x_n)$ konstant. Setzt man $x_1=x_2=\ldots=x_n$, so folgt

---

[3]) Denn aus $M^{(k)}(x,\ldots,x)=x$ folgt, daß

$$M^{(k)}_{x_1}(x,\ldots,x)+M^{(k)}_{x_2}(x,\ldots,x)+\ldots+M^{(k)}_{x_n}(x,\ldots,x)=1,$$

und wegen der Symmetrie ist

$$M^{(k)}_{x_i}(x,\ldots,x)=M^{(k)}_{x_j}(x,\ldots,x).$$

aus b), daß diese Konstante gleich Null ist. Also hat man

$$\Phi(M^{(1)})+\ldots+\Phi(M^{(n)})=\Phi(x_1)+\ldots+\Phi(x_n).$$

Die quasiarithmetische Mittelwertfunktion

$$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{n}(\Phi(x_1)+\ldots+\Phi(x_n))\right]$$

genügt also der Funktionalgleichungen (1), folglich ist sie gleich $M(x_1,\ldots,x_n)$.

Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Wir bemerken noch, daß, wenn $M^{(1)},\ldots,M^{(n)}$ quasiarithmetische Mittelwerte sind, so sind die unter (3) angegebenen Funktionen die Ableitungen der K-N Funktionen der Mittelwerte $M^{(1)}, M^{(2)},\ldots, M^{(n)}$.[4]) Also ist in diesem Falle die Ableitung der K-N Funktion des Resultates des Mischalgorithmus, das geometrische Mittel der Ableitungen der K-N Funktionen der Mittelwerte $M^{(1)},\ldots, M^{(n)}$. Wir erhielten also den folgenden

S a t z. *Dafür, daß das Resultat des Mischalgorithmus der Mittelwerte $M^{(1)}, M^{(2)},\ldots, M^{(n)}$ ein quasiarithmetisches Mittel sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$E(M^{(1)})\,M^{(1)}_{x_i}+\ldots+E(M^{(n)})\,M^{(n)}_{x_i}=E(x_i)$$

für $i=1,2,\ldots,n$ gilt. Dabei ist

$$E(x)=\exp\left\{-n\int^{x}[M^{(1)}_{x_p x_q}(t,\ldots,t)+\ldots+M^{(n)}_{x_p x_q}(t,\ldots,t)]\,dt\right\}$$
$$(p,q=1,2,\ldots,n \text{ beliebig};\ p\neq q).$$

Z u s a t z: *Sind $M^{(1)},\ldots, M^{(n)}$ quasiarithmetische Mittelwerte, sind weiter die Ableitungen ihrer monoton wachsenden K-N Funktionen gleich $F_1'(x),\ldots,F_n'(x)$, so ist die Ableitung der K-N Funktion von M (falls sie existiert) gleich*

$$E(x)=\sqrt[n]{F_1'(x)\ldots F_n'(x)}.$$

4. Wir müssen noch eine Frage klären. Bei der Bildung der Funktion $E(x)$ betrachteten wir die zweiten partiellen Ableitungen der gegebenen Mittelwerte nach x_p und x_q und wir bezeichneten mit p und q beliebige ganze Zahlen ($p\neq q$) zwischen 1 und n. Es wäre nun denkbar, daß die so definierte Funktion $E(x)$ nicht eindeutig bestimmt ist.

---

[4]) J. Aczél—St. Fenyő, Über die Theorie der Mittelwerte, *diese Acta*, **11** (1948), pp. 239—245.

Dieser Fall ist mit unseren Annahmen unverträglich. Aus der Symmetrie der gegebenen Mittelwerte folgt nämlich

$$M_{x_1}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = M_{x_p}^{(k)}(x_p, x_2, \ldots, x_1, \ldots, x_n).$$

Differenzieren wir beiderseits nach x_q $(q \neq p)$, so ergibt sich

$$M_{x_1 x_q}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = M_{x_p x_q}^{(k)}(x_p, \ldots, x_1, \ldots, x_n).$$

Ist hier $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = t$, so ist

$$M_{x_1 x_q}^{(k)}(t, \ldots, t) = M_{x_p x_q}^{(k)}(t, \ldots, t) \qquad (k, p, q = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus b) erhält man

$$M_{x_1}^{(k)}(t, \ldots, t) = \frac{1}{n},$$

woraus sich

$$M_{x_1 x_1}^{(k)}(t, \ldots, t) + M_{x_1 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t) + \ldots + M_{x_1 x_n}^{(k)}(t, \ldots, t) = 0$$

ergibt. Nun ist nach der vorigen Feststellung

$$M_{x_1 x_1}^{(k)}(t, \ldots, t) = (n-1)\, M_{x_1 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t)$$

und ähnlich gilt

$$M_{x_2 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t) = (n-1)\, M_{x_1 x_2}^{(k)}(t, \ldots, t),$$

u. s. w. Also ist

$$M_{x_i x_i}^{(k)}(t, \ldots, t) = (n-1)\, M_{x_p x_q}^{(k)}(t, \ldots, t)$$

von i, p und q unabhängig, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

5. Schließlich betrachten wir einige typischen Beispiele, welche auf manche interessante Erscheinungen hinweisen.

I. Es sei

$$M^{(1)}(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad M^{(2)}(x_1, x_2) = H(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

A und H sind quasiarithmetisch, ihre K-N Funktionen sind

$$F_1(x) = x \quad \text{und} \quad F_2(x) = -\frac{1}{x}$$

und es gilt

$$F_1'(x) = f_1(x) = 1; \quad F_2'(x) = f_2(x) = \frac{1}{x^2}; \quad E(x) = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}.$$

Nun ist $E(A) A_{x_1} + E(H) H_{x_1} = E(x_1)$, also ist das Resultat des

Mischalgorithmus von A und H quasiarithmetisch; seine K-N Funktion ist

$$\Phi(x)=\int E(x)\,dx=\log x.$$

Die Umkehrfunktion von $\Phi(x)$ ist e^x, also ist

$$M(x_1, x_2)=G(x_1, x_2)=e^{\frac{\log x_1+\log x_2}{2}}=\sqrt{x_1 x_2}.$$

Der gesuchte Mittelwert ist also das geometrische Mittel von x_1 und x_2. In diesem Falle waren die ursprünglich angenommenen Mittelwerte und auch des Resultat quasiarithmetisch.

II. Es sei

$$M^{(1)}(x_1, x_2)=H(x_1, x_2)=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2};\; M^{(2)}(x_1, x_2)=K(x_1, x_2)=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}.$$

Hier ist

$$f_1(x)=\frac{1}{x^2};\; f_2(x)=\exp\left[-4\int^x K_{x_1x_2}(t,\ldots,t)\,dt\right]=x^2;\; E(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}.x^2}=1.$$

Also gilt

$$E(H)H_{x_1}+E(K)K_{x_1}=\frac{2x_2^2}{(x_1+x_2)^2}+1-\frac{2x_2^2}{(x_1+x_2)^2}=1=E(x_1).$$

Das mit dem Mischalgorithmus gewonnene Mittel ist also auch quasiarithmetisch und zwar ist es eben das arithmetische Mittel von x_1 und x_2. Denn es ist

$$\Phi(x)=\int E(x)\,dx=x, \quad \text{also} \quad M(x_1, x_2)=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Das merkwürdige an diesem Beispiele ist, daß obzwar einer der gegebenen Mittel — das antiharmonische — nicht quasiarithmetisch ist, das Resultat doch quasiarithmetisch wird.

III. Es kann auch vorkommen, daß obzwar keiner der gegebenen Mittelwerte quasiarithmetisch ist, das durch den Mischalgorithmus gewonnene Mittel doch quasiarithmetisch ist. Z. B.

$$M^{(1)}(x_1, x_2)=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2};\; M^{(2)}(x_1, x_2)=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2};\; M(x_1, x_2)=\sqrt{x_1 x_2}.$$

IV. Als letztes Beispiel zeigen wir die Umkehrung dieser letzten Behauptung. Das durch den Mischalgorithmus gewonnene Mittel kann nämlich auch ein nichtquasiarithmetisches sein, selbst wenn die Ausgangsmittel quasiarithmetisch sind. Z. B.

$$M^{(1)}(x_1, x_2)=A(x_1, x_2)=\frac{x_1+x_2}{2};\; M^{(2)}(x_1, x_2)=G(x_1, x_2)=\sqrt{x_1 x_2}.$$

Dann ist $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$, $E(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, und

$$E(A)A_{x_1}+E(G)G_{x_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_1+x_2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x_1x_2}}\cdot\frac{x_2}{2\sqrt{x_2}}$$

ist von x_2 nicht unabhängig, also ist das aus A und G gewonnene Mittel nicht quasiarithmetisch. Da aber dieser Mittelwert eben das Gaussische Medium arithmetico-geometricum ist, so erkennen wir die bekannte interessante Tatsache, das dieses wichtige Mittel nicht quasiarithmetisch ist.

(Eingegangen am 21. Januar 1948.)