Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen.

Von I. SZÉLPÁL in Szeged.

Im folgenden bestimmen wir alle Abelschen Gruppen[1] $\mathfrak{G}$, die keine *eigentlichen* homomorphen Abbildungen gestatten, d. h. folgende Eigenschaft E_1 haben:

E_1: *Jedes homomorphe Bild* $\overline{\mathfrak{G}} \neq \{0\}$ [2]) *von* $\mathfrak{G}$ *ist isomorph zu* $\mathfrak{G}$.

Diese Bedingung ist offenbar gleichwertig damit, daß jede Faktorgruppe (mit mehr als einem Element) von $\mathfrak{G}$ isomorph zu $\mathfrak{G}$ ist.

Für endliche (nicht notwendig kommutative) Gruppen $\mathfrak{G}$ ist E_1 äquivalent mit der Einfachheit von $\mathfrak{G}$. Daher kann eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft E_1 auch „halbeinfach" genannt werden.

Unter den endlichen Abelschen Gruppen sind bekanntlich nur die (zyklischen) Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$ von Primzahlordnung p einfach, also auch halbeinfach. Dagegen gibt es unter den unendlichen Abelschen Gruppen auch halbeinfache Gruppen, die nicht einfach sind. Ein Beispiel für eine solche Gruppe liefert die multiplikative Gruppe sämtlicher p-ter, p^2-ter, p^3-ter, ... komplexer Einheitswurzeln (p Primzahl), die offenbar auch als die durch die Elemente $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von der Eigenschaft

$$(1) \qquad A_1 \neq 0, \; pA_1 = 0, \; pA_2 = A_1, \; pA_3 = A_2, \ldots$$

erzeugte (additive) Abelsche Gruppe definiert werden kann. Diese Gruppe bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(p^\infty)$[3]. Man sieht unmittelbar, daß die Gruppe

---

[1]) Diese schreiben wir additiv.

[2]) $\{\ \}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Gruppe. Insbesondere soll $\{0\}$ die aus dem Nullelement allein bestehende Gruppe bezeichnen.

[3]) Diese Bezeichnung rechtfertigt sich durch folgende interessante Eigenschaft von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$, die Herr Prof. L. RÉDEI bemerkt hat: $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ *ist die einzige Abelsche Gruppe, die, aber keine echte Untergruppe von ihr, alle zyklischen Gruppen* $\mathfrak{Z}(p^e)$ *der Ordnung* p^e ($e = 1, 2, 3, \ldots$) *als Untergruppen enthält.* (Es ist keineswegs trivial, daß die Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ auch in dieser Weise definiert werden kann, denn es gibt Abelsche Gruppen, z. B. die unendliche direkte Summe $\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{Z}(p^2) + \mathfrak{Z}(p^3) + \ldots$, die alle $\mathfrak{Z}(p^e)$ enthalten, ohne auch $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ zu enthalten.) Die Richtigkeit der Be-

$\mathfrak{Z}(p^{\infty})$ die Eigenschaft E_1 hat, denn die echten Untergruppen dieser Gruppe sind mit den zyklischen Gruppen $\{A_n\}$ von der Ordnung p^n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ erschöpft und es gilt $\mathfrak{Z}(p^{\infty})/\{A_n\} \cong \mathfrak{Z}(p^{\infty})$.

Nun zeigen wir, daß die angegebenen Beispiele schon alle halbeinfache Abelschen Gruppen sind. Es gilt nämlich der

Satz: $\mathfrak{Z}(p)$ *und* $\mathfrak{Z}(p^{\infty})$ $(p=2, 3, 5, 7, \ldots)$ *sind alle Abelschen Gruppen von der Eigenschaft* E_1.

Diesen Satz werden wir sehr einfach, mit Hilfe des folgenden Satzes von BAER[4]) beweisen: *Gilt für die Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *einer Abelschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *die Gleichung* $n\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$ *mit jeder natürlichen Zahl n, so ist* $\mathfrak{H}$ *ein direkter Summand von* $\mathfrak{G}$. Nach diesem Satz ist $\mathfrak{Z}(p^{\infty})$ ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$, falls $\mathfrak{Z}(p^{\infty}) \subset \mathfrak{G}$ gilt. Es ist nämlich: $n\mathfrak{Z}(p^{\infty})=\mathfrak{Z}(p^{\infty})$. Die Richtigkeit dieser Gleichung ist nach (1) für $n=p^e$ klar. Da alle Elemente von $\mathfrak{Z}(p^{\infty})$ von p-Potenzordnung sind, so ist auch $m\mathfrak{Z}(p^{\infty})=\mathfrak{Z}(p^{\infty})$ mit $p \nmid m$ offenbar richtig. Für ein beliebiges $n=p^e m$, $(p \nmid m)$ folgt hieraus in der Tat: $n\mathfrak{Z}(p^{\infty})=mp^e\mathfrak{Z}(p^{\infty})=m\mathfrak{Z}(p^{\infty})=\mathfrak{Z}(p^{\infty})$.

Sei nun $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe mit der Eigenschaft E_1. Beim Beweis des Satzes unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

Erster Fall: *Es gebe eine natürliche Zahl n* mit $n\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}$. Dann gibt es offenbar auch eine Primzahl p mit der Eigenschaft $p\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}$. In diesem Fall hat die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/p\mathfrak{G}$ mehr als ein Element, folglich muß sie isomorph zu $\mathfrak{G}$ sein. Da aber in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/p\mathfrak{G}$ alle Elemente $\neq 0$ von der Ordnung p sind, so zerfällt $\mathfrak{G}$ in die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Es kann aber nicht $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p)+\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}^* \neq \{0\}$ sein, denn daraus folgte $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{Z}(p)$ im Widerspruch mit der vorausgesetzten Eigenschaft E_1. Folglich erhalten wir in diesem Fall: $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p)$.

Zweiter Fall: *Es gelte für alle n die Gleichung* $n\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{F}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bestehend aus sämtlichen Element endlicher Ordnung. Zuerst zeigen wir, daß $\mathfrak{F} \neq \{0\}$ ist. Würde nämlich $\mathfrak{G}$ aus lauter Elementen von unendlicher Ordnung bestehen, so folgte für ein Element $B \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}\,\{2B\},$$

merkung von RÉDEI läßt sich nach einer freundlichen mündlichen Mitteilung von Herrn T. SZELE so zeigen: Enthält die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ sämtliche Gruppen $\mathfrak{Z}(p^e)(e=1,2,3,\ldots)$, so gilt dasselbe offenbar auch für die Untergruppe $p\mathfrak{G}$ (bestehend aus allen Elementen pX mit $X \in \mathfrak{G}$). Ist außerdem noch $\mathfrak{G}$ eine minimale Gruppe dieser Eigenschaft, so muß $p\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$ gelten. Das besagt aber, daß jedes Element von $\mathfrak{G}$ in der Form $pX\,(X \in \mathfrak{G})$ erscheint. Folglich läßt sich eine Folge $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von Elementen in $\mathfrak{G}$ bestimmen, die die Eigenschaft (1) hat. Wieder wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{G}$ muß dann $\mathfrak{G}$ mit der Untergruppe $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}=\mathfrak{Z}(p^{\infty})$ übereinstimmen, w. z. b. w.

[4]) R. BAER, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, **37** (1936), S. 766–781 (Theorem 1.1, S. 766).

was ein Widerspruch mit E_1 ist; denn $\mathfrak{G}/\{2B\}$ hat ein Element 2-ter Ordnung, mithin kann diese Gruppe nicht isomorph zu $\mathfrak{G}$ sein. Nun folgt aus der Eigenschaft $n\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$ auch $n\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ für alle n. Denn $n\mathfrak{G}=\mathfrak{G}$ besagt, daß jede Gleichung $nX=G\in\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ eine Lösung X hat. Für ein $G\in\mathfrak{F}$ muß diese Lösung X auch in $\mathfrak{F}$ liegen, so daß $n\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ gilt. Sei nun A_1 ein Element von Primzahlordnung p aus $\mathfrak{F}$. Dann folgt aus $p\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ die Existenz einer Folge von Elementen A_2, $A_3, \ldots$ in $\mathfrak{F}$ mit der Eigenschaft (1). Diese Elemente erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ von $\mathfrak{F}$ d. h. auch von $\mathfrak{G}$, die nach obigem ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist. In $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p^\infty)+\mathfrak{G}^*$ muß aber nach E_1 der Summand $\mathfrak{G}^*$ (wie oben) verschwinden, womit $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p^\infty)$ also auch der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 29. Oktober 1948.)