Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen.

Von T. SZELE in Debrecen (Ungarn).

In der vorangehenden Arbeit von Herrn I. SZÉLPÁL[1]) wurden alle Abelschen Gruppen bestimmt, die keine eigentlichen homomorphen Abbildungen gestatten. Ein analoges Problem ist, sämtliche Abelsche Gruppen[2]) $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, die keine eigentlichen Endomorphismen (d. h. homomorphe Abbildungen in sich) gestatten, die also folgende Eigenschaft E_2 haben:

E_2: *Jeder vom Nulloperator verschiedene Endomorphismus von* $\mathfrak{G}$ *ist ein Automorphismus.*

Unter den endlichen Abelschen Gruppen sind offenbar nur die Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$ der Ordnung p (= Primzahl) von dieser Eigenschaft. (Ich spreche übrigens die Vermutung aus, daß die Eigenschaft E_2 für endliche Gruppen mit der Einfachheit gleichwertig ist[3]).)

Ein Beispiel für eine unendliche Abelsche Gruppe, die nicht einfach, aber von der Eigenschaft E_2 ist, wird durch die additive Gruppe $\mathfrak{R}^+$ sämtlicher rationaler Zahlen angegeben. Man sieht nämlich unmittelbar, daß die „multiplikativen" Endomorphismen von $\mathfrak{R}^+$ (die also jedes Element auf sein r-faches abbilden, wobei r eine feste rationale Zahl bezeichnet) alle Endomorphismen erschöpfen. Wir beweisen den folgenden

Satz: $\mathfrak{Z}(p)$ *und* $\mathfrak{R}^+$ *sind alle Abelschen Gruppen von der Eigenschaft* E_2.

---

[1]) I. SZÉLPÁL, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *diese Acta*, **12** (1949), S. 51—53.

[2]) Diese schreiben wir additiv.

[3]) Aus der Einfachheit von $\mathfrak{G}$ folgt offenbar E_2. Die Möglichkeit der Umkehrung macht die folgende Überlegung sehr wahrscheinlich. Ist eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht-einfach, fällt sie sogar mit ihrer Kommutatorgruppe nicht zusammen, so gilt auch E_2 nicht für $\mathfrak{G}$. Denn $\mathfrak{G}$ hat dann einen Normalteiler von einem Primzahlindex p und zugleich auch eine Untergruppe der Ordnung p, worauf sich $\mathfrak{G}$ homomorph abbilden läßt. Folglich kann die obige Vermutung nur durch eine endliche nicht-einfache Gruppe, die ihre eigene Kommutatorgruppe ist, widerlegt werden.

Bemerkung. Auf Grund der Analogie beider Probleme kann dieser Satz als der „dual-entsprechende“ des Satzes von SZÉLPÁL in der vorangehenden Arbeit betrachtet werden. Die Gruppen $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}^+$ erscheinen in der Gruppentheorie oft als „Zwillinge“. Z. B. $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}^+$ sind alle maximalen Abelschen Gruppen ersten Ranges[4]).

Sei nun $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe von der Eigenschaft E_2. Da die Abbildung $X \to nX$ $(X \in \mathfrak{G})$ für jede (feste) ganze Zahl n ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, muß wegen E_2 für jedes n entweder $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, oder $n\mathfrak{G} = \{0\}$ gelten. Demnach unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: *Es gebe ein n mit $n\mathfrak{G} = \{0\}$.* Dann muß die kleinste solche positive ganze Zahl $n = p$ eine Primzahl sein, denn aus $n = uv$ $(u, v < n)$, $u\mathfrak{G} = v\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ folgt $n\mathfrak{G} = uv\mathfrak{G} = u\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Wegen $p\mathfrak{G} = \{0\}$ hat aber jedes Element $\neq 0$ von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p, folglich zerfällt $\mathfrak{G}$ in die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{G}^*$ folgt nun nach E_2 $\mathfrak{G}^* = \{0\}$, denn gegenfalls hätte $\mathfrak{G}$ einen *eigentlichen* Endomorphismus, der nämlich jedem Element von $\mathfrak{G}$ seine $\mathfrak{Z}(p)$-Komponente (gemäß der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{G}^*$) zuordnet. In diesem Falle haben wir also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p)$ bekommen.

Zweiter Fall: *Es gelte für jedes n die Gleichung $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$.* Zuerst zeigen wir, daß in diesem Fall die Gruppe $\mathfrak{G}$ rein-unendlich ist, d. h. kein Element $\neq 0$ von endlicher Ordnung enthält. Aus $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ und E_2 folgt nämlich, daß die Abbildung $X \to nX$ $(X \in \mathfrak{G})$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, so daß $nX = 0$ nur für $X = 0$ gelten kann.

Sei nun $A \neq 0$ ein festes Element der rein-unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, für die nach der Voraussetzung $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. Dann ist die Gleichung

$$nX = mA \tag{1}$$

für jedes Paar $m, n \neq 0$ von ganzen Zahlen in $\mathfrak{G}$ lösbar, und zwar hat diese Gleichung genau eine Lösung X in $\mathfrak{G}$, da diese Gruppe rein-unendlich ist. Aus demselben Grunde sieht man, daß X in (1) nur von der rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ abhängt. Ordnet man also dem Element X in (1) von $\mathfrak{G}$ die Zahl $\frac{m}{n}$ zu, so entsteht offenbar eine eineindeutige Abbildung einer Teilmenge von $\mathfrak{G}$ auf die additive Gruppe $\mathfrak{R}^+$ sämtlicher rationaler Zahlen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, denn

[4]) Unter einer Abelschen Gruppe *ersten Ranges* versteht man eine kommutative Gruppe, in der jedes Paar von Untergruppen $\neq \{0\}$ einen Durchschnitt $\neq \{0\}$ besitzt. „Maximal“ soll bezeichnen, daß die angegebene Eigenschaft keiner echten Obergruppe der betrachteten Gruppe zukommt.

aus (1) und $n'X'=m'A$ folgt

$$nn'(X+X')=(mn'+m'n)A,$$

also $X+X'\to\frac{mn'+m'n}{nn'}=\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}$. Wir haben damit bewiesen, daß $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{R}^+$ isomorphe Untergruppe enthält, die also mit $\mathfrak{R}^+$ bezeichnet werden kann. Dann folgt aber aus dem in der vorangehenden Arbeit zitierten Satz von BAER[5]) (im Falle $\mathfrak{H}=\mathfrak{R}^+$):

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{R}^+ + \mathfrak{G}^*,$$

da nämlich offenbar $n\mathfrak{R}^+=\mathfrak{R}^+$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ gilt. Hier muß (wie oben) nach E_2 der Summand $\mathfrak{G}^*$ verschwinden, womit $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}^+$, also auch der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 29. Oktober 1948.)

5) Siehe die Bemerkung 4) in der vorangehenden Arbeit.