# Über die ebenen Bogen der linearen Ordnung Drei.

Herrn HEINRICH TIETZE zum 70. Geburtstag am 31. VIII. 1950 gewidmet.

Von OTTO HAUPT in Erlangen (Deutschland).

## Einleitung.

Die Gestalten[1]) der (nicht notwendig algebraischen) *Kurven*[2]) vom linearen Ordnungswert[3]). Drei in der projektiven Ebene $P_2$ hat zuerst C. JUEL[4]) bestimmt unter der Voraussetzung, daß es sich um Vereinigungen von endlich vielen (stetig) differenzierbaren[5]) Bogen vom linearen Ordnungswert Zwei (also von Konvexbogen) handelt. Andererseits hat Herr A. MARCHAUD[6]) gezeigt, daß jeder *Bogen* (in $P_2$) vom linearen Ordnungswert Drei und vom linearen *Indexwert Null* Vereinigung von 2 oder von 3 oder von 4 Konvexbogen ist, deren jeder (bei geeigneter Reihenfolge) mit dem vorhergehenden einen Endpunkt gemeinsam hat;

---

[1]) Der Begriff der *Gestalt* kann dabei auf verschiedene Weise definiert werden. Im Text oben liegt zunächst der früher (*Monatshefte für Math. und Phys.* **43** (1936), S. 261 ff. eingeführte Gestaltsbegriff zu Grunde; vgl. auch oben im Text (Einleitung weiter unten). Die in §§ 2, 3 oben im Text besprochene Klassifikation der Bogen 3. Ordnung deckt sich nicht vollständig mit diesem Gestaltsbegriff.

[2]) Unter einem *Bogen* bzw *einfachen Bogen* wird ein eindeutiges, stetiges bzw. ein topologisches Streckenbild verstanden. Handelt es sich speziell) um ein eindeutiges stetiges bzw. topologisches *Kreis*bild, so sprechen wir von eine *Kurve* bzw. *einfachen* Kurve. Besitzt der Bogen $\mathfrak{B}$ die Endpunkte $A$ und $C$, so schreiben wir auch $\mathfrak{B} = \widehat{AC}$, ferner $AC$ für die Verbindungsgerade von $A$ und $C$, sowie $\underline{AC}$ bzw. $\overline{AC}$ für eine offene bzw. abgeschlossene Strecke mit den Endpunkten $A$ und $C$. Soweit nicht anders bemerkt, kann ein Bogen offen oder abgeschlossen, d. h. Bild einer offenen oder abgeschlossenen Strecke sein.

[3]) Unter dem *linearen Ordnungswert* bzw. *Indexwert* eines Bogens $\mathfrak{B}$, *abgekürzt* $LO(\mathfrak{B})$ bzw. $LI(\mathfrak{B})$, sei das in den oben im Text betrachteten Fällen stets vorhandene) Maximum bzw Minimum der Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit den Geraden des $P_2$ verstanden. Ist $LO(\mathfrak{B})$ endlich, so kann $\mathfrak{B}$ insbesondere keine Strecken (und erst recht keine Geraden) enthalten. Unter dem linearen *Ordnungswert* eines *einfachen* Bogens *in einem Punkt* $Q \in \mathfrak{B}$, in Zeichen $LO(Q)$ genauer $LO(Q; \mathfrak{B})$ ist das Minimum der $LO(\mathfrak{U})$ zu verstehen für alle Umgebungen $\mathfrak{U}$ von $Q$ auf $\mathfrak{B}$; es heißt $\mathfrak{B}$ linear *ordnungssingulär* in $Q \in \mathfrak{B}$ und $Q$ ordnungssingulär (auf $\mathfrak{B}$), wenn $LO(Q) > 2$ ist. Betr. eine Klassifikation der ordnungssingulären Punkte vgl. Fußnote [11]). Ist $T$ ein *mehrfacher Punkt* von $\mathfrak{B}$, d. h. Bild mindestens zweier Punkte der Urbildstrecke, so haben wir $LO(T)$ jeweils auf einen bestimmten *Zweig*, d. h. auf die Bilder der Umgebungen *eines* (festen) Urbildpunktes von $T$, zu beziehen. Ein (singulärer oder

dabei wird Differenzierbarkeit (und stückweise Konvexität)[7]) des Bogens nicht vorausgesetzt. Der Marchaudsche Satz ist keineswegs eine Folge oder naheliegende Verallgemeinerung des Juelschen; es gibt nämlich[8]) Bogen vom linearen Ordnungswert Drei, die nicht ordnungsfest zu *Kurven* erweiterbar, d. h. nicht Teilbogen von Kurven des linearen Ordnungswertes Drei sind.

Während JUEL[4]) sein Korrespondenzprinzip als Beweismittel heranzieht, gelangt Herr MARCHAUD[6]) durch eine Diskussion der möglichen

nicht-singulärer) Punkt $Q$ des ebenen Bogens $\mathfrak{B}$, in dem zwei konvexe Teilbogen von $\mathfrak{B}$ zusammenstoßen, heiße *glatt*, wenn in $Q$ genau eine freie Tangente (Paratingente) $t$ an $\mathfrak{B}$ existiert, d. h. wenn alle Geraden durch 2, beliebig gegen $Q$ konvergierende Punkte $P'$, $P''$ von $\mathfrak{B}$ den gleichen Limes $t$ besitzen. (Dabei sollen $P'$ und $P''$ dem gleichen Zweig von $\mathfrak{B}$ angehören, vgl. Nr. 2. 1.) Ein ordnungssingulärer Punkt $S$ von $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann glatt, wenn $S$ ein Wendepunkt[11]) ist (Vgl. allgemein für Bogen im $E_n$ bei I. SAUTER, *Math. Zeitschrift*, 42 (1937), S. 539 ff.). Daß $\mathfrak{B}$ den Indexwert Null besitzt, kann (vermöge passender Wahl der uneigentlichen Geraden) als gleichbedeutend angesehen werden damit, das $\mathfrak{B}$ in der euklidischen Ebene $E_2$ innerhalb eines Kreises liegt (beschränkt ist). Demgemäß wird jeder Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LJ(\mathfrak{B})=0$ als in $E_2$ und beschränkt angenommen; dann hat auch der Begriff „Seite" einer Geraden einen Sinn.

[4]) C. JUEL, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung, *Danske Vidensk. Selskab Skrifter*, 7. R., *Naturv. og Math. Afd.*, 11, 2. (Kopenhagen, 1914), S. 113 ff. Vgl. auch C. JUEL, Einige Sätze über ein- und mehrteilige Elementarkurven 4. Ordnung, *Math. Annalen*, 76 (1915), S. 343 ff.

[5]) D. h., es soll in jedem Punkt $R$ des Konvexbogens $\mathfrak{K}$ die (stets eindeutig bestimmte) vordere Halbtangente an $\mathfrak{K}$ komplementär (d. h. entgegengesetzt gerichtet) sein zur hinteren Halbtangente; ihre gemeinsame Trägergerade ist die Tangente an $\mathfrak{K}$ in $R$; diese Tangente ist stetige Funktion von $R$ (die Geraden als Elemente eines topologischen Raumes betrachtet). Überdies ist $\mathfrak{B}$ in jedem seiner Punkte glatt (vgl. [3])).

[6]) A. MARCHAUD, Sur les continus d'ordre borné, *Acta math.*, 55 (1930), S. 67 ff. Bei Herrn MARCHAUD, ist stets $LJ(\mathfrak{B})=0$, vgl. a. a. O., S. 69. Ziff. 1., 3. Absatz, oder S. 83 unten. — Die Indexwerte 0 und 1 sind bei $LO(\mathfrak{B})=3$ die einzig möglichen; denn es ist $LJ(\mathfrak{B})\leqq 1$, weil jede Stützgerade an $\mathfrak{B}$ in $Q\in\mathfrak{B}$ höchstens einen weiteren Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält.

[7]) Daß jeder Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LO(\mathfrak{B})=3$ Vereinigung *endlich* vieler Konvexbogen ist, wurde gezeigt in *Math. Annalen*, 92 (1924), S. 88 ff.; kürzerer Beweis auch in den *Sitzungsberichten d. Bayerischen Akad. d. Wissenschaften, math. naturw. Abt.*, 1925, S. 6.

[8]) MARCHAUD, a. a. O.[6]), S. 89. Der Bogen des Marchaudschen Beispiels hat den Indexwert Null; es gibt aber auch nicht ordnungsfest erweiterbare Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LO(\mathfrak{B})=3$ und $LJ(\mathfrak{B})=1$. Die *Nichterweiterbarkeit* ist *bedingt* durch die Definition des Ordnungswertes, demzufolge $\mathfrak{B}$ *bei endlichem* $LO(\mathfrak{B})$ *keine Strecken enthalten kann*, vgl.[3]). Bei anderer Definition (vgl. z. B. *Sitzungsberichte d. Bayerischen Akad. d. Wissenschaften, math.-naturw. Abt.*, 1941, S. 57 ff., Nr. 2. 2.) ist ordnungsfeste Erweiterung zu einer Kurve immer möglich, nämlich durch Hinzufügen einer Strecke („triviale" Erweiterung). (Vgl. *Math. Zeitschrift*, 52 (1950), S. 527 ff., wo auch gezeigt wird, daß ein Bogen, wenn überhaupt nicht-trivial zu einen *Bogen*, dann sogleich nicht-trivial zu einer *Kurve* ordnungsfest erweiterbar ist (a. a. O., S. 542, Zusatz)).

gegenseitigen Lagen dreier Maximalsekanten[9]) bzw. ihrer Schnittpunkte mit dem Bogen zum Ziel. Im Folgenden soll demgegenüber auf ein der Juelschen Methode näherliegendes Verfahren hingewiesen werden, das einen, wie uns scheint, gedanklich einfachen Beweis des Marchaudschen Satzes liefert. Darüber hinaus führt das in Rede stehende Verfahren ganz von selbst zu einer übersichtlichen, *gestaltlichen Klassifikation* aller Bogen $\mathfrak{B}$ vom linearen Ordnungswert Drei und von beliebigem Indexwert; man erhält dabei Kriterien, denen zufolge die „Gestalt" von $\mathfrak{B}$ bestimmt ist durch *Erstens* die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{B}$, welche auf der Verbindungsgeraden $g$ der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ liegen, sowie durch die gegenseitige Lage dieser Punkte auf $g$; *Zweitens* durch die Lage von $\mathfrak{B}$ relativ zu $g$ in der Umgebung eines jeden der Endpunkte von $\mathfrak{B}$. Die „Gestalt" von $\mathfrak{B}$ ist dabei[1]) im wesentlichen festgelegt durch die Anzahl und Art der ordnungssingulären[3]) Punkte von $\mathfrak{B}$ sowie durch die Mindestanzahlen der Konvexbogen, als deren Vereinigungen sich die jeweils größten singularitätenfreien Teilbogen von $\mathfrak{B}$ darstellen lassen. Die oben erwähnte (und in §§ 2, 3 mitgeteilte) gestaltliche Klassifikation der Bogen $\mathfrak{B}$ vom linearen Ordnungswert Drei ist dabei insofern etwas schärfer als die bloße Aufzählung der verschiedenen Gestalten von $\mathfrak{B}$, als in ihr Bogen gleicher Gestalt durch weitere Merkmale unterschieden werden.

Die vorhin erwähnte Herleitung des Satzes von Herrn MARCHAUD wird nachstehend (§ 1) gebracht. Sodann wird (§§ 2, 3) die angedeutete Klassifikation der Bogen vom linearen Ordnungswert Drei angegeben, wobei in Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum auf die Wiedergabe der Beweise verzichtet werden musste; diese sollen in einer späteren Note nachgetragen werden. Ferner soll später die Aufzählung aller nicht ordnungsfest erweiterbaren Bogen vom linearen Ordnungswert Drei mitgeteilt werden. Auch hoffen wir, bei dieser Gelegenheit auf die Gestalten der *Kontinua* vom linearen Ordnungswert Drei näher einzugehen sowie auf die Frage nach einer Ergänzung unserer notwendigen Bedingungen zu hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Vereinigung von höchstens vier Konvexbogen den linearen Ordnungswert Drei besitzt.

Unser Verfahren zur Bestimmung der Gestalten der Bogen in der Ebene vom linearen Ordnungswert Drei hat allgemeinen Charakter, insofern es nämlich bei anderen Ordnungsproblemen für Bogen (z. B. für ebene Bogen bei anderen Ordnungscharakteristiken) anwendbar ist,

---

[9]) Unter einer *Maximalsekante* von $\mathfrak{B}$ ist eine Gerade zu verstehen, die *Sekante* ist, d. h. mit $\mathfrak{B}$ nur Schnittpunkte gemeinsam hat und zwar genau soviele Schnittpunkte, als der Ordnungswert beträgt, also Drei. Gemäß des sogen. Reduktionssatzes (*Monatshefte für Math. und Phys.*, **40** (1933), S. 18) folgt aus der Endlichkeit von $LO(\mathfrak{B})$ die Existenz von Maximalsekanten.

falls Kriterien für die Zerlegung „nicht-normaler" Bogen in „normale" (vgl. § 1) bekannt sind und falls jede ordnungsgeometrische Singularität ordnungsfest geglättet d. h. falls der betrachtete Bogen gleichmäßig approximiert werden kann durch Bogen des gleichen Ordnungswertes mit nur glatten Singularitäten.

## § 1. Minimalzahl[9a]) der konvexen Teilbogen bei Bogen dritter Ordnung vom Index Null.

**1. 1.** Es sei $\mathfrak{B}'$ ein Bogen mit $LO(\mathfrak{B}')=3$ und $LJ(\mathfrak{B}')=0$ in $P_2$, also o. B. d. A.[3]) ein *beschränkter* Bogen in der *euklidischen Ebene* $E_2$. Es besitzt $\mathfrak{B}'$ höchstens einen mehrfachen Punkt[10]). Es ist $\mathfrak{B}'$ Vereinigung endlich vieler Konvexbogen[7]), besitzt also nur endlich viele ordnungssinguläre Punkte $S$.

**1. 2.** Es sei $\mathfrak{B}'$ zunächst *einfach* und es sei $S' \in \mathfrak{B}'$ ordnungssingulär auf $\mathfrak{B}'$ aber kein Wendepunkt[11]). Dann kann $\mathfrak{B}'$ in beliebig kleiner 2-dimensionaler, ausser $S'$ keine ordnungssingulären Punkte von $\mathfrak{B}'$ enthaltender, Umgebung $\mathfrak{U}$ von $S'$ so abgeändert („abgerundet") werden, daß durch die Abrundung wieder ein einfacher Bogen $\mathfrak{B}$ mit $LO(\mathfrak{B})=3$ und $LJ(\mathfrak{B})=0$ entsteht, der nur in einer 2-dimensionalen Umgebung $\mathfrak{U}$ von $S'$ mit $\overline{\mathfrak{U}} \subset \mathfrak{B}'$ nicht mit $\mathfrak{B}'$ identisch ist und der in $\mathfrak{B}'$ genau einen oder genau zwei Wendepunkte besitzt, je nachdem $S'$ ein Schnabel oder ein Dorn war. Somit ist $\mathfrak{B}'$ gleichmäßiger Limes von einfachen Bogen $\mathfrak{B}_n$, deren ordnungssinguläre Punkte sämtlich Wendepunkte sind. Gilt daher der Marchaudsche Satz für diese Bogen $\mathfrak{B}_n$, so auch für $\mathfrak{B}'$; denn der Limes eines in $\mathfrak{B}_n$ enthaltenen Konvexbogens $\mathfrak{K}$ ist konvexer Teilbogen von $\mathfrak{B}'$ oder ein Punkt von $\mathfrak{B}'$.

Demgemäß werden wir von jetzt an *alle ordnungssingulären Punkte als* W e n d e *punkte voraussetzen.*

**1. 3.** Es sei $\mathfrak{B}$ *einfach* mit $LJ(\mathfrak{B})=0$. Wir sagen, es liege $\mathfrak{B}$ n o r m a l z u r M a x i m a l s e k a n t e $m$, wenn bei geeigneter Orient-

---

[9a]) Vgl. die Definition im Text Nr. 2. 2.

[10]) Marchaud, a. a. O.[6]), Ziff. 15., S. 87—88.

[11]) Es seien $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ Konvexbogen, welche einen Endpunkt $Q$ gemeinsam haben und sonst fremd sind. Die Vereinigung von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ ist ein einfacher Bogen $\mathfrak{K}$. Es seien $h', h''$ die Halbtangenten in $Q$ an $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{K}''$ und es seien $g', g''$ die Trägergeraden von $h'$ bzw. $h''$. Ist $g' \neq g''$ so bezeichnen wir $Q$ als *Dorn* oder als *Schnabel* auf $\mathfrak{K}$, wenn in einer Umgebung von $Q$ folgendes gilt: $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ liegen beide außerhalb des von $h', h''$ begrenzten Winkelraumes $\mathfrak{w}$ (mit $0<\mathfrak{w}<\pi$) oder der eine liegt außerhalb, der andere innerhalb von $\mathfrak{w}$. Ist aber $g'=g''$, so haben wir in $Q$ einen zu den Dornen bzw. Schnäbeln zu rechnenden Grenzfall, nämlich eine *Dornspitze* bzw. einen *Wendepunkt*, je nachdem $h'=h''$ oder $h' \neq h''$, *vorausgesetzt*, daß $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ *auf verschiedenen Seiten von* $g'$ liegen. Falls $g'=g''$ und $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ beide auf der *gleichen* Seite von $g'$ liegen, ist $LO(Q;\mathfrak{K})=2$ oder gleich 4, je nachdem $h' \neq h''$ oder $h'=h''$.

ierung von $\mathfrak{B}$ und $m$ die Reihenfolge der 3 Punkte von $m\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$ und auf $m$ (in $E_2$) die gleiche ist. Liegt $\mathfrak{B}$ normal zu jeder Maximalsekante, so heiße $\mathfrak{B}$ normal (schlechthin). Liegt $\mathfrak{B}$ nicht normal zu $m$, so sagen wir, es liege $\mathfrak{B}$ anormal zu $m$ und, falls mindestens eine solche Maximalsekante existiert, es sei $\mathfrak{B}$ anormal.

**1.3.1.** Ist dann $\mathfrak{B}$ *normal*, so besitzt $\mathfrak{B}$ höchstens 3 ordnungssinguläre Punkte und ist Vereinigung von (höchstens) 4 Konvexbogen[12]).

**1.3.2.** Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ anormal gelegen, etwa zur Maximalsekante $m$. Sind dann $S_j, j = 1, 2, 3$, die Schnittpunkte von $m$ mit $\mathfrak{B}$ in natürlicher Reihenfolge auf $\mathfrak{B}$, so liegt $S_3$ auf $m$ zwischen $S_1$ und $S_2$. Daher liegt der eine Endpunkt, etwa $C$, von $\mathfrak{B} = \widehat{AC}$ innerhalb des vom Teilbogen $\mathfrak{A} = \widehat{S_1S_2}$ von $\mathfrak{B}$ und von der Strecke $\overline{S_1S_2}$ begrenzten, beschränkten Gebietes. Die Verbindungsgerade $g = AC$ der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ hat daher einen Schnittpunkt $Q$ mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam derart, daß $C$ auf $g$ zwischen $A$ und $Q$ liegt. Für Anormalität von $\mathfrak{B}$ ist daher notwendig (und auch hinreichend), daß die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte $A$ und $C$ von $\mathfrak{B}$ noch einen Schnittpunkt $Q$ trägt, der außerhalb der Verbindungsstrecke der Bogenendpunkte liegt; dabei ist $LO(\mathfrak{B}) = 3$ und $LJ(\mathfrak{B}) = 0$ angenommen, ferner $C$ als zwischen $A$ und $Q$ gelegen. Demgemäß ist $\mathfrak{L} = \widehat{QC} \cup \widehat{CQ}$ eine einfache (geschlossene, beschränkte) Kurve, die auf der entgegegengesetzten Seite von $g = AC$ liegt wie der Bogen $\mathfrak{A} = \widehat{AQ}$. Außerdem ist $LO(\mathfrak{C}) = 2$ für $\mathfrak{C} = \widehat{CQ}$; andernfalls nämlich würde eine Gerade existieren[9]), die mit $\mathfrak{C}$ genau 3 *Schnitt*punkte gemeinsam hätte, also mit der Strecke $QC$ genau einen und folglich mit $\mathfrak{A}$ mindestens einen Schnittpunkt, im Widerspruch mit $LO(\mathfrak{B}) = 3$. Ganz entsprechend ergibt sich, daß $LO(Q) = 2$ auf $\mathfrak{B}$ ist; man kann zum Beweise die Tatsache benützen, daß im Falle $LO(Q) = 3$ Geraden existieren, welche mit $\mathfrak{B}$ drei Schnittpunkte gemeinsam haben, von denen mindestens einer innerhalb $\mathfrak{A}$ und mindestens einer innerhalb $\mathfrak{C}$ (in beliebigen Nähe von $Q$) liegt. Schließlich ist $\mathfrak{A}$ nicht anormal, also normal; denn die Verbindungsgerade $AQ$ seiner Endpunkte schneidet $\mathfrak{A}$ nicht. Nun kann aber $\mathfrak{A}$ nicht mehr als einen ordnungssingulären Punkt enthalten; denn andernfalls würden[13]) Stützgerade $t$ an $\mathfrak{A}$ existieren, die durch $Q$ gehen, und zu $t$ würde es eine benachbarte Gerade geben, die mindestens 4 Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hätte. Damit ist der Marchaudsche Satz für den Fall einfacher Bogen bewiesen.

---

[12]) a. a. O.[9]) und *Annali di mat. pura ed applicata*, **27** (1948), S. 301, (*B*) (2).
[13]) zufolge des sogen. Expansionssatzes, a. a. O.[9]), S. 37.

**1.4.** Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ *nicht einfach,* aber wieder sei $LO(\mathfrak{B})=3$, $LJ(\mathfrak{B})=0$. Dann existiert[14]) genau ein zweifacher Punkt $D$ auf $\mathfrak{B}$. Zunächst falle $D$ mit dem Endpunkt $C$ von $\mathfrak{B}$ zusammen. Dann ist $\mathfrak{B}$ wieder anormal und es gelten im wesentlichen unverändert die einschlägigen Überlegungen von Nr. 1. 3. 2. Nunmehr sei $D$ verschieden von den beiden Endpunkten $A, C$ von $\mathfrak{B}$. Es sei $\mathfrak{A}=\widehat{AD}$ bzw. $\mathfrak{C}=\widehat{CD}$ der *einfache* Teilbogen von $\mathfrak{B}$ mit den Endpunkten $A, D$ bzw. $C, D$. Dann ist $(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\cup(D)$ eine Kurve $\mathfrak{K}$ mit $LO(\mathfrak{K})\leqq 3$, also mit $LO(\mathfrak{K})=2$ (weil $LO(\mathfrak{K})\equiv 0 \bmod 2$). Es ist ferner $LO(D)=2$ (gemäß Nr. 1. 3. 2) auf demjenigen Bogen, der dadurch entsteht, daß man die Bogen $\mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{K}-(D))$ bzw. $\mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{K}-(D))$ in $D$ aneinandersetzt, und der, abgesehen von $D$, nur einfache Punkte enthält. Daher bilden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in $D$ einen Dorn. Somit ist $\mathfrak{B}$ Limes von Vereinigungen $\mathfrak{B}_n$ aus dem Oval $\mathfrak{K}$ und aus einem einfachen Bogen $\mathfrak{R}_n$ mit $LO(\mathfrak{B}_n)=$ $=LO(\mathfrak{R}_n)=3$, wobei $\mathfrak{R}_n$ durch Abrunden (in $D$) desjenigen Bogens erhalten wird, der durch Zusammensetzen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in $D$ entsteht und einfach ist. Folglich besitzt $\mathfrak{R}_n$ mindestens zwei Schnäbel und zwar Wendepunkte. Für $n\to\infty$ konvergieren diese zwei Wendepunkte gegen $D$. Nun ist $\mathfrak{R}_n$ gemäß Nr. 1. 3 ff. Vereinigung von nicht mehr als 4 Konvexbogen; und unter diesen Konvexbogen konvergiert nach dem eben Bemerkten derjenige gegen einen Punkt, nämlich gegen $D$, welcher durch die in Rede stehenden zwei Wendepunkte von $\mathfrak{R}_n$ begrenzt ist. Dieser Konvexbogen geht daher beim Grenzübergang „verloren". Daraus folgt die Giltigkeit des Marchaudschen Satzes auch für Bogen mit Doppelpunkt (wenn man etwa $\mathfrak{K}$ als *einen* Konvexbogen zählt).

Anmerkung. Auch die Bogen vom Index Eins ließen sich jetzt noch ein beziehen (vgl. dazu § 3.).

## § 2. Klassifikation der Bogen dritter Ordnung vom Index Null.

**2. 1.** Zwecks übersichtlicher Formulierung der ins Auge gefaßten Klassifikation führen wir zunächst folgende Unterscheidung ein hinsichtlich des Verhaltens des Bogens $\mathfrak{B}$ in je einem seiner Endpunkte $A, C$. Es sei nämlich $s$ die offene (beschränkte) Verbindungsstrecke dieser Endpunkte; dann setzen wir $LO(A)=3$ oder $LO(A)=2$ je nachdem es Geraden $f$ durch zwei zu $A$ beliebig benachbarte Punkte von $\mathfrak{B}$ gibt oder nicht gibt, für die der Durchschnitt von $f$ und $s$ nicht leer ist. (Um auch den Fall einzubeziehen, daß $A$ Doppelpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, haben wir festzusetzen: Die erwähnten Nachbarpunkte von $A$ gehören

[14]) Marchaud, a. a. O. [6]), S. 87 unten.

zu demjenigen Zweig $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$, dessen Urbild eine Umgebung desjenigen Endpunktes der Urbildstrecke ist, der $A$ entspricht. Im Falle $LO(A)=3$ bzw. $LO(A)=2$ bezeichnen wir $A$ als einen Quasischnabel bzw. als einen Quasihut. Diese Bezeichnung wird durch die Tatsache nahegelegt, daß im Falle eines Quasihutes bzw. Quasischnabels in $A$ der Bogen $\mathfrak{B}$ in der Nähe von $A$ innerhalb bzw. außerhalb desjenigen Winkelraumes verläuft, welcher von der Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in $A$ und von der, $C$ enthaltenden Halbgeraden mit $A$ als Anfangspunkt gebildet wird. Und die Bezeichnung $LO(A)=2$ usw. ist motiviert durch die Bemerkung, daß $A$ auf dem aus $\mathfrak{A}$ und der Strecke $\underline{AC}$ zusammengesetzten Bogen den linearen Ordnungswert 2 usw. besitzt, wenn bei der Bestimmung des Ordnungswertes die Trägergerade von $\underline{AC}$ als Ordnungscharakteristik außer Betracht bleibt.

Wir bemerker ferner: Die Verbindungsgerade $g$ der Endpunkte von $\mathfrak{B}$ ist[14a]) entweder fremd zu $\mathfrak{B}$ oder hat mit $\mathfrak{B}$ genau einen Schnittpunkt $S$ gemeinsam. Ist $\mathfrak{B}$ einfach und liegt $S$ auf $g$ zwischen den beiden Endpunkten $A$ und $C$, so ist $\mathfrak{B}$ normal, andernfalls anormal. (Vgl. Nr. 1. 3. 2.) Bei *anormalem* $\mathfrak{B}$ können und wollen wir die *Bezeichnung der Endpunkte* stets *so wählen,* daß $C$ *zwischen* $A$ *und* $S$ liegt.

Schließlich führen wir, ebenfalls der größeren Übersichtlichkeit wegen, nachstehende Abkürzungen ein. Die Tatsache, daß $\mathfrak{B}$ ein einfacher oder nicht-einfacher Bogen vom Index 0 ist, werde durch das Zeichen $E_0$ bzw. $D_0$ angedeutet. Ist der Bogen $\mathfrak{B}$ einfach und hat $\mathfrak{B}$ mit der Verbindungsgeraden seiner Endpunkte keinen bzw. einen weiteren Punkt gemeinsam, so soll dies durch das Zeichen $E_0(0|j)$ bzw. $E_0(1|n|j)$ und $E_0(1|a|j)$ angedeutet werden, wobei $n$ bzw. $a$ besagt, daß $\mathfrak{B}$ normal bzw. anormal ist, und wobei $j$ die Anzahl der auf $\mathfrak{B}$ gelegenen Schnäbel bezeichnet (ein Dorn hierbei als äquivalent mit zwei Schnäbeln gerechnet).

**2. 2.** Mit Benutzung der in Nr. 2. 1 angegebenen Bezeichnungen läßt sich jetzt unsere Klassifikation zunächst der *einfachen* Bogen so formulieren:

*Jeder einfache Bogen* $\mathfrak{B}$ *vom linearen Ordnungswert Drei und vom Indexwert Null besitzt eine der folgenden Gestalten:*

Erstens. Die Verbindungsgerade $g$ der beiden Endpunkte $A, C$ von $\mathfrak{B}$ ist fremd zu $\mathfrak{B}$ bis auf $A$ und $C$ (Typus $E_0(0)$).

Es enthält $\mathfrak{B}$

genau *einen Schnabel* (aber keinen Dorn), wenn einer der Endpunkte ein Quasischnabel, der andere aber ein Quasihut ist (Typus $E_0(0|1)$);

genau *zwei Schnäbel oder* genau *einen Dorn,* wenn beide Endpunkte Quasischnäbel sind. (Typus $E_0(0|2)$.)

[14a]) Unter $\mathfrak{B}$ wird hier der *offene* Bogen verstanden (vgl. Fußnote [1])).

Zweitens. Die Verbindungsgerade $g$ der beiden Endpunkte $A, C$ von $\mathfrak{B}$ enthält, außer $A$ und $C$, genau einen Punkt $S$; dieser ist stets Schnittpunkt (Typus $E_0(1)$). Es sind zwei Unterfälle zu unterscheiden

Unterfall ($n$): Die beiden Endpunkte werden auf $g$ getrennt durch $S$. Dann ist $\mathfrak{B}$ normal (Typus $E_0(1|n)$) und es enthält $\mathfrak{B}$

genau *einen Schnabel* (aber keinen Dorn), wenn beide Endpunkte Quasihüte sind (Typus $E_0(1|n|1)$;

genau *zwei Schnäbel oder* genau *einen Dorn*, wenn einer der Endpunkte ein Quasihut, der andere ein Quasischnabel ist (Typus $E_0(1|n|2)$)

genau *drei Schnäbel oder* genau *einen Schnabel und* genau *einen Dorn*, wenn beide Endpunkte Quasischnäbel sind (Typus $E_0(1|n|3)$).

Unterfall ($a$): Die beiden Endpunkte werden auf $g$ nicht durch $S$ getrennt. Dann ist $\mathfrak{B}$ *anormal* (Typus $E_0(1|a)$).

Liegt etwa $C$ auf $g$ zwischen $A$ und $S$, so enthält $\mathfrak{B}$

*keinen Schnabel* und *keinen Dorn*, wenn $A$ ein Quasihut ist (Typus $E(1|a|0)$)

genau *einen Schabel* (aber keinen Dorn), wenn $A$ ein Quasischnabel ist (Typus $E_0(1|a|1)$).[15])

Wir bezeichnen jetzt als Minimalzahl *der Konvexbogen von* $\mathfrak{B}$ die Anzahl $k$ von Konvexbogen derart, daß $\mathfrak{B}$ als Vereinigung von $k$ aber von nicht weniger Konvexbogen darstellbar ist. Dann gilt weiter:

Für Typus $E_0(0)$ und $E_0(1|n)$ ist die Minimalzahl der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ stets um Eins größer als die Anzahl der ordnungssingulären Punkte von $\mathfrak{B}$.

Für Typus $E_0(1|a\,0)$ ist die Minimalzahl der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ gleich Zwei (also um Zwei größer als die Anzahl der Ordnungssingulären Punkte).

Für Typus $E_0(1|a|1)$ ist die Minimalzahl der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ gleich Zwei oder gleich Drei, je nachdem die zur Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in $C$ komplementäre Halbgerade nicht fremd oder fremd ist zum abgeschlossenen Teilbogen $\widehat{AR}$ von $\mathfrak{B}$, wo $R$ der Schnabel von $\mathfrak{B}$ (je nachdem ist also die Minimalzahl um Eins oder um Zwei größer als die Anzahl der ordnungssingulären Punkte).

**2.3.** Ist $\mathfrak{B}$ *nicht einfach*, so schreiben wir $D_0$ statt $E_0$ und $D_0(0)$ bzw. $D_0(1)$, je nachdem auf der Verbindungsgeraden $g$ der Endpunkte $A, C$ von $\mathfrak{B}$ kein oder ein weiterer Punkt (außer $A$ und $C$) liegt (der dann notwendig Schnittpunkt ist). Es gilt nun:

---

[15]) Für die Unterscheidung zweier weiterer Unterfälle bei Typus $E_0(1|a|1)$ vgl. die Bemerkung betr. die Minimalzahl weiter unten im Text.

*Jeder nicht-einfache Bogen $\mathfrak{B}$ vom linearen Ordnungswert Drei und vom Indexwert Null besitzt* (genau einen mehrfachen und zwar zweifachen Punkt und) *keinen Dorn. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:*

Erstens: Enthält $g$ außer $A, C$ keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ (Typus $D_0(0)$), so besitzt $\mathfrak{B}$ *keinen Schnabel.* Beide Endpunkte sind Quasischnäbel.

Zweitens: Enthält $g$ außer $A, C$ noch genau einen Schnittpunkt[16]), so besitzt $\mathfrak{B}$

*keinen Schnabel,* wenn der eine Endpunkt ein Quasischnabel, der andere ein Quasihut ist (Typus $D_0(1|0)$);

genau *einen Schnabel,* wenn beide Endpunkte Quasischnäbel sind (Typus $D_0(1|1)$).

Die *Minimalzahl* der Konvexbogen von $\mathfrak{B}$ ist für alle diese Typen um Zwei größer als die der Schnäbel.

**2. 4.** Bei der Klassifikation in Nr. 2. 2. und 2. 3. besitzen Bogen verschiedener Typen gleiche Gestalt im Sinne der Einleitung.[1]) Es sind nämlich in diesem Sinne gestaltsgleich: Die Bogen der Typen $E_0(0|1)$, $E_0(1|n|1)$ und $E_0(1|a|1)$, soweit die Bogen des letzteren Typus die Minimalzahl Zwei besitzen; ferner die Bogen der Typen $E_0(0|2)$ und $E_0(1|n|2)$, soweit die Bogen je zwei Schnäbel oder je einen Dorn besitzen; schließlich die Bogen der Typen $D_0(0|0)$ und $D_0(1|0)$, soweit bei den Bogen des Typus $D_0(1|0)$ der eine Endpunkt nicht zugleich Doppelpunkt ist.

## § 3. Klassifikation der Bogen dritter Ordnung vom Index Eins.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bogen vom linearen Ordnungswert Drei und vom Indexwert Eins: Zeichen $E_1$ bzw. $D_1$. Ferner sei $g = AC$ die Verbindungsgerade der Endpunkte von $\mathfrak{B}$. Jeder solche Bogen $\mathfrak{B}$ gehört dann zu einem der folgenden Typen:

Erstens: Es hat $g$ (außer $A$ und $C$) mit $\mathfrak{B}$ genau (einen Punkt und zwar) einen Stützpunkt gemeinsam (Fall $(st)$); des Näheren gilt hier:

*Entweder* ist $\mathfrak{B}$ einfach und besitzt dann genau *zwei Schnäbel* oder genau *einen Dorn* (Typus $E_1(st|2)$;

*Oder* es ist $\mathfrak{B}$ nicht einfach und besitzt keinen Schnabel (und keinen Dorn) (Typus $D_1(st|0)$);

Zweitens: Es hat $g$ (außer $A$ und $C$) mit $\mathfrak{B}$ genau (einen Punkt und zwar) einen Schnittpunkt gemeinsam (Fall $(s)$). Dann

---

[16]) Hinsichtlich ihrer Gestalt[1]) sind noch zu unterscheiden die Bogen, bei denen kein oder ein Endpunkt mit dem Doppelpunkt zusammenfällt (vgl. im Text Nr. 2. 4).

ist $\mathfrak{B}$ *nicht-einfach* und besitzt genau *einen Schnabel* (und keinen Dorn) (Typus $D_1(s|1)$).

Die *Minimalzahl* ist für Typus $E_1(st|2)$ um Eins größer als die Anzahl der ordnungssingulären Punkte, für Typus $D_1(st|0)$ ist sie gleich Zwei, für Typus $D_1(s|1)$ ist sie gleich Zwei oder Drei, je nachdem keine oder eine Stützgerade an $\mathfrak{B}$ durch den ordnungssingulären Punkt von $\mathfrak{B}$ geht.

Zusatz. Die Bogen vom Typus $E_1(st|2)$ bzw. $D_1(st|0)$ sind Limiten von Bogen des Typus $E_0(0|2)$ bzw. $D_0(0)$. Beim Typus $E_1(st|2)$ kann man noch die Unterfälle unterscheiden, daß der Stützpunkt auf der Geraden $g$ entweder nicht singulär oder daß er ein Schnabel oder ein Dorn ist.

Anmerkung. Die Juelsche Klassifikation der Kurven dritter Ordnung ergibt sich mit Hilfe entsprechender Überlegungen (man erhält je einen Typus $E_1$ mit 3 Schnäbeln bzw. einem Schnabel und einem Dorn und einen Typus $D_1$ mit (genau) einem Schnabel).

*(Eingegangen am 8. August 1949.)*