Verallgemeinerung der Derivierten in der Geometrie der Polynome.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

1. In dieser Arbeit wird der Begriff der Derivierten eines Polynoms verallgemeinert. Es wird gezeigt, daß bekannte (und teilweise noch nicht bekannte) Sätze über die Nullstellenverteilung eines Polynoms und seiner Derivierten oder einer linearen Verknüpfung des Polynoms und seiner Derivierten auch dann bestehen, wenn die Derivierte durch eine verallgemeinerte Derivierte ersetzt wird.

Hat das Polynom $f(z)$ n-ten Grades die Form

$$f(z)=C(z-z_1)^{q_1}(z-z_2)^{q_2}\dots(z-z_m)^{q_m},\ q_k\geqq 1,\ \sum_{k=1}^{m} q_k=n,\ C\neq 0 \tag{1}$$

und bedeuten $p_1, p_2, \dots, p_m$ der Gleichung

$$p_1+p_2+\dots+p_m=n \tag{2}$$

genügende beliebige positive Zahlen, so wird das Polynom $(n-1)$-ten Grades

$$f^*(z)=f(z)\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{z-z_k} \tag{3}$$

eine *Derivierte* (im allgemeineren Sinne) des Polynoms $f(z)$ genannt.

Im Falle $p_k=q_k$ $(k=1, 2, \dots, m)$ ist $f^*(z)=f'(z)$ die gewöhnliche oder *isobare* Derivierte, sonst heißt $f^*(z)$ eine *anisobare* oder *allgemeine* Derivierte von $f(z)$. Da die Gewichte p_k im allgemeinen keine ganzen Zahlen sind, ist das logarithmische Integral von $f^*(z)$ im allgemeinen kein Polynom.

2. Der Gauß—Lucassche Satz läßt sich für eine anisobare Derivierte ebenso beweisen, wie für die isobare.

Die Gleichung

$$\zeta^*=z-n\frac{f(z)}{f^*(z)} \tag{4}$$

definiert einen Polarpunkt ζ^* (im allgemeinen Sinne) des Punktes z

bezüglich des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades. Die Gleichung (4) läßt sich auch in den Formen

$$\frac{n}{z-\zeta^*}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-z_k}=\frac{f^*(z)}{f(z)}\quad\left(\sum_{k=1}^{m}p_k=n,\ \ p_k>0\right)\tag{5}$$

und

$$\sum p_k\frac{\zeta^*-z_k}{z-z_k}=0\tag{6}$$

schreiben.

Im Falle $p_k=q_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ ist ζ^* der isobare Polarpunkt, der Laguerresche derivierte Punkt[1]) von z, der Schwerpunkt der Nullstellen von $f(z)$ in bezug auf den Punkt z nach PÓLYA—SZEGŐ[2]).

Der bekannte Laguerresche Satz gilt auch im allgemeinen Falle:

I. *Bezeichnet $f^*(z)$ eine (isobare oder anisobare) Derivierte des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und ist $f(z_0)\cdot f^*(z_0)\neq 0$, so werden die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ von jedem Kreis K durch das Punktpaar*

$$z_0,\ \zeta^*=z_0-n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)}$$

getrennt. (Liegt nämlich nicht jede Nullstelle von $f(z)$ auf K, so besitzt $f(z)$ mindestens je eine Nullstelle innerhalb und außerhalb des Kreises K.)

Nach (6) besteht die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k(z_k-\zeta^*)}{z_k-z_0}=0.\tag{7}$$

Sind $z_k-z_0=r_k\cdot e^{i\alpha_k}$, $z_k-\zeta^*=\varrho_k e^{i\beta_k}$, $\beta_k-\alpha_k=\omega_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ und bezeichnet ω einen beliebigen Winkel, so läßt sich die Gleichung (7) in der Form

$$e^{-i\omega}\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k\varrho_k}{r_k}e^{i\omega_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k\varrho_k}{r_k}[\cos(\omega_k-\omega)+i\sin(\omega_k-\omega)]=0$$

schreiben, woraus

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k\varrho_k}{r_k}\sin(\omega_k-\omega)=0\tag{8}$$

folgt. Die Glieder dieser Summe verschwinden, falls jede Nullstelle z_k von $f(z)$ auf einem Kreis K liegt, von dessen Punkten aus der Vektor $\overrightarrow{z_0\zeta^*}$ unter einem Winkel ω oder $\omega+\pi$ erscheint. Hat die Summe von (8) ein nicht verschwindendes Glied, so hat sie mindestens je ein positives und negatives Glied. Das Polynom $f(z)$ hat dann mindestens je eine Nullstelle innerhalb und außerhalb von K.

---

1) LAGUERRE, *Oeuvres.* I, S. 133—143.

2) G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* II, S. 55—66, 242—253. Dieses Werk wird unter PÓLYA - SZEGŐ zitiert.

Das Polynom $(n-1)$ ten Grades

$$nf(z)+(\zeta-z)f^*(z) \tag{9}$$

ist ein *allgemeines* (erstes) *Polarpolynom* des Punktes ζ in bezug auf das Polynom $f(z)$ n-ten Grades. Aus dem Satz I folgt

II. *Die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades werden von jedem Kreis K getrennt, der durch den Punkt ζ ($f(\zeta)\neq 0$) und durch eine Nullstelle des Polarpolynoms* (9) *geht.*

3. Ein bekannter Satz von J. L. WALSH[3]) läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

III. *Liegen n_1 Nullstellen $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n_1}$ eines Polynoms $f(z)$ (n_1+n_2)-ten Grades im Kreise K_1: $|z-\alpha_1|\leq r_1$, die übrigen n_2 Nullstellen $z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n_2}$ im Kreise K_2: $|z-\alpha_2|\leq r_2$ und bezeichnet K_3 den Kreis*

$$|z-\alpha_3|\leq r_3,\ \alpha_3=\frac{n_1\alpha_2+n_2\alpha_1}{n_1+n_2},\ r_3=\frac{n_1 r_2+n_2 r_1}{n_1+n_2},$$

so hat das Polynom

$$f^*(z)=f(z)\left[\sum_{h=1}^{n_1}\frac{p_{1h}}{z-z_{1h}}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{p_{2k}}{z-z_{2k}}\right]=f_1(z)f_2(z)\left[\frac{f_1^*(z)}{f_1(z)}+\frac{f_2^*(z)}{f_2(z)}\right], \tag{10}$$

wo

$$p_{1h}^*>0,\ p_{2k}^*>0\ \ (h=1,2,\ldots,n_1;\ k=1,2,\ldots,n_2),$$

$$\sum_{h=1}^{n_1}p_{1h}=n_1,\quad \sum_{k=1}^{n_2}p_{2k}=n_2$$

und

$$f_1(z)=\prod_{h=1}^{n_1}(z-z_{1h})\ \text{und}\ f_2(z)=\prod_{k=1}^{n_2}(z-z_{2k})$$

sind, außerhalb der Kreise K_1, K_2 und K_3 keine Nullstelle.

Haben keine zwei der Kreisscheiben K_1, K_2 und K_3 einen Punkt gemeinsam, so besitzt das Polynom $f(z)$ in der Kreisscheibe K_1, K_2 bzw. K_3 n_1-1, n_2-1 Nullstellen bzw. eine Nullstelle.

Liegt die Nullstelle z_0 des Polynoms $f^*(z)$ außerhalb beider Kreise K_1 und K_2, so fällt der Punkt

$$\zeta_j=z_0-n_j\frac{f_j(z_0)}{f_j^*(z_0)}\qquad (j=1,2) \tag{11}$$

in die Kreisscheibe K_j. Widrigenfalls könnte man nämlich durch die Punkte z_0 und ζ_j einen Kreis führen, von dem die Nullstellen des Polynoms $f_j(z)$ nicht getrennt werden. Deshalb sind $|\zeta_1-\alpha_1|\leq r_1$ und $|\zeta_2-\alpha_2|\leq r_2$. Der Punkt

---

3) J. L. WALSH, On the location of the roots of the derivative of a polynomial, *Comptes rendus du Congrès International de Math. Strasbourg 1920*, S. 339—342.

$$\frac{n_1\zeta_2+n_2\zeta_1}{n_1+n_2}=z_0-n_1n_2\frac{f_1^*(z_0)f_2(z_0)+f_2^*(z_0)f_1(z_0)}{f_1^*(z_0)f_2^*(z_0)}=$$
$$=z_0-n_1n_2\frac{f^*(z_0)}{f_1^*(z_0)f_2^*(z_0)}=z$$

liegt im Kreise K_3, weil

$$|z_0-\alpha_3|=\left|\frac{n_1\zeta_2+n_2\zeta_1}{n_1+n_2}-\frac{n_1\alpha_2+n_2\alpha_1}{n_1+n_2}\right|=$$
$$=\left|\frac{n_1(\zeta_2-\alpha_2)+n_2(\zeta_1-\alpha_1)}{n_1+n_2}\right|\leqq\frac{n_1r_2+n_2r_1}{n_1+n_2}=r_3$$

ist.

Damit ist der erste Teil des Satzes III bewiesen. Zum Beweis des zweiten Teiles nimmt man nach einer Methode von Walsh an, daß keine zwei der Kreisscheiben K_1, K_2 und K_3 einen Punkt gemeinsam haben. Läßt man die Nullstellen des Polynoms $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$ im Kreise K_1 bzw. K_2 stetig verändern, so verändern sich die Nullstellen von $f^*(z)$ stetig und keine Nullstelle von $f^*(z)$ kann aus einem der Kreise K_1, K_2 und K_3 austreten oder in eine dieser Kreisscheiben eintreten. Widrigenfalls gäbe es nämlich ein den Annahmen des Satzes III genügendes Polynom $f^*(z)$, das eine Nullstelle außerhalb der drei Kreise K_1, K_2 und K_3 besitzt. Das Polynom $f^*(z)$ hat also im Kreise K_1, K_2 bzw. K_3 dieselbe Anzahl der Nullstellen, wie im Falle $z_{11}=z_{12}=\ldots=z_{1n_1}=\alpha_1$ und $z_{21}=z_{22}=\ldots=z_{2n_2}=\alpha_2$. Dann sind

$$f(z)=(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\text{ und }f^*(z)=f(z)\left[\frac{n_1}{z-\alpha_1}+\frac{n_2}{z-\alpha_2}\right]=$$
$$=n\,(z-\alpha_1)^{n_1-1}(z-\alpha_2)^{n_2-1}(z-\alpha_3).$$

Damit ist der Satz III bewiesen.

4. Für ein reelles Polynom (mit lauter reellen Koeffizienten) gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von JENSEN[4]):

IV. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades ν Paare z_h, $\bar z_h$ $(h=1,2,\ldots,\nu)$ der konjugiert imaginären Nullstellen und $n-2\nu$ reelle Nullstellen, bezeichnet K_h den Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungsstrecke $(z_h, \bar z_h)$ ist, ist ferner $f^*(z)$ eine reelle Derivierte des Polynoms $f(z)$ [d. h. zu den Punkten z_h und $\bar z_h$ gehört dasselbe positive Gewicht p_h $(h=1,2,\ldots,\nu)$ in $f^*(z)$], und bedeuten λ_0, λ_1 und λ_2 beliebige reelle Zahlen $(\lambda_1^2+\lambda_2^2>0)$, so fällt jede nichtreelle Nullstelle der Polynome von der Form*

$$G(z)=(\lambda_0-\lambda_1^2z)f(z)+\lambda_2^2f^*(z)$$

mindestens in eine der ν Kreisscheiben $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$.

---

[4]) L. W. JENSEN, Recherches sur la théorie des équations, *Acta Math.*, **36** (1913), S. 181–195. — GY. (J.) v. SZ. NAGY, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **31** (1922), S. 238–251.

Sind $z_h = a_h + i b_h$, $\bar{z}_h = a_h - i b_h$ $(b_h \neq 0,\ h = 1, 2, \ldots, \nu)$, $z_k = c_k$ $(k = 2\nu + 1, 2\nu + 2, \ldots, n)$ und ist $z_0 = x_0 + i y_0$ eine nichtreelle Nullstelle des Polynoms $G(z)$, für welche $f(z_0) \neq 0$ ist, so ist

$$\frac{G(z_0)}{f(z_0)} = \lambda_0 - \lambda_1^2 z_0 + \lambda_2^2 \frac{f^*(z_0)}{f(z_0)} =$$

$$= \lambda_0 - \lambda_1^2 z_0 + \lambda_2^2 \left[\sum_{h=1}^{\nu} \left(\frac{p_h}{z_0 - a_h - i b_h} + \frac{p_h}{z_0 - a_h + i b_h} \right) + \sum_{k=2\nu+1}^{n} \frac{p_k}{z_k - c_k} \right] = 0.$$

Für den imaginären Teil dieser Gleichung besteht also die Gleichung

$$-y_0 \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \sum_{h=1}^{\nu} 2 p_h \frac{(x_0 - a_h)^2 + y_0^2 - b_h^2}{[(x_h - a_h)^2 + b_h^2 - y_0^2]^2 + 4 (x_0 - a_h)^2 y_0^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 \sum_{k=2\nu+1}^{n} \frac{p_k}{(x_0 - c_k)^2 + y_0^2} \right] = 0.$$

Daraus folgt der Satz V, weil die erste Summe mindestens ein nicht positives Glied besitzen muß.

Es gilt auch der Satz[5])

V. *Besitzt das reelle Polynom $f(z)$ n-ten Grades das k-fache $(k \geq 1)$ konjugiert komplexe Nullstellenpaar $a + ib$, $a - ib$ und die reellen Nullstellen $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2k}$, so fällt jede nichtreelle und von $a + ib$ und $a - ib$ verschiedene Nullstelle seiner Derivierten*

$$f^*(z) = f(z) \left[\frac{k}{z - a - ib} + \frac{k}{z - a + ib} + \sum_{h=1}^{n-2k} \frac{p_h}{z - c_h} \right]$$

$$\left(p_h > 0, \quad 2k + \sum_{h=1}^{n-2k} p_h = n \right)$$

in das Innere des Kreises

$$|z - a| = |b| \sqrt{\frac{n - 2k}{n}} < |b| \frac{n - k}{n}.$$

Ist $z_0 = x_0 + i y_0$ $(y_0 \neq 0)$ eine Nullstelle von $f^*(z)$, aber keine Nullstelle des Polynoms

$$f(z) = [(z - a)^2 + b^2]^k \cdot g(z), \quad g(z) = (z - c_1)(z - c_2) \ldots (z - c_{n-2k}),$$

so ist

$$\frac{f^*(z_0)}{f(z_0)} = \frac{2k(z_0 - a)}{(z_0 - a)^2 + b^2} + \frac{g^*(z_0)}{g(z_0)} = 0.$$

Die Punkte z_0 und ζ_0^*

$$\zeta_0^* = z_0 - (n - 2k) \frac{g(z_0)}{g^*(z_0)} = z_0 + \frac{(n - 2k)}{2k} \frac{(z_0 - a)^2 + b^2}{z_0 - a} =$$

$$= \frac{1}{2k} \left[n z_0 - (n - 2k) a + \frac{(n - 2k) b^2}{z_0 - a} \right]$$

---

[5]) Für die isobare Derivierte vgl. die Arbeit des Verfassers in der Fußnote [4]).

liegen an entgegengesetzten Seiten der reellen Achse. Widrigenfalls könnte man nämlich durch die Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$ und $\zeta_0^* = \xi_0 + i\eta_0$ einen Kreis führen, von dem die (lauter reellen) Nullstellen des Polynoms $g(z)$ nicht getrennt werden. Hieraus folgt der Satz V, weil nach dem Ausdruck von ζ_0^*

$$y_0\eta_0 = \frac{y_0^2}{2k}\left[n - \frac{(n-2k)b^2}{(x_0-a)^2+y_0^2}\right] = y_0^2\,\frac{n-2k}{2k}\cdot\left[\frac{n}{n-2k} - \frac{b^2}{|z_0-a|^2}\right] < 0$$

ist.

5. Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades in einem Kreis K, so liegt der Polarpunkt ζ^* jedes außerhalb von K liegenden Punktes z_0 nach Satz I innerhalb des Kreises K. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man die folgenden drei Sätze.

VI. *Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades in einem Kreis K, so liegt eine beliebige Nullstelle des Polynoms*

$$g(z) = f(z) + Cf^*(z),\quad C = A + iB$$

entweder im Kreise K, oder in einem Kreise K', der aus K durch die Parallelverschiebung um den Vektor $-nC$ entsteht.

Haben die Kreise K und K' keinen Punkt gemeinsam, so besitzt $g(z)$ eine Nullstelle im Kreise K' und $n-1$ Nullstellen im Kreise K.

Hätte nämlich $g(z)$ eine Nullstelle z_0 außerhalb beider Kreise K und K' so wären die Punkte

$$z_0 \text{ und } \zeta_0^* = z_0 - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 + nC$$

außerhalb des Kreises K gelegen. Dies ist aber unmöglich, weil die Kreisscheibe K jede Nullstelle von $f(z)$ enthält. Damit ist der erste Teil des Satzes VI bewiesen[6]).

Haben die Kreise K und K' keinen Punkt gemeinsam und bewegen sich die Nullstellen von $f(z)$ im Kreise K, so hat kein zugehöriges Polynom $g(z)$ eine Nullstelle außerhalb beider Kreise K und K'. Die Anzahl der Nullstellen der Polynome $g(z)$ im Kreise K bzw. K' bleibt unverändert, während die Nullstellen von $f(z)$ sich im Kreise K beliebig bewegen. Fallen die Nullstellen von $f(z)$ in den Mittelpunkt α von K zusammen, so ist α eine $(n-1)$-fache Nullstelle und der Mittelpunkt $\alpha' = \alpha - nC$ von K' ist eine einfache Nullstelle des Polynoms $g(z)$. Dann sind nämlich

$$f(z) = (z-\alpha)^n,\quad f^*(z) = n(z-\alpha)^{n-1} = f'(z),$$
$$g(z) = f(z) + Cf^*(z) = (z-\alpha)^{n-1}(z-\alpha').$$

---

[6]) Für den ersten Teil des Satzes VII vgl. die Aufgabe 114 von PÓLYA—SZEGŐ II, S. 58.

VII. *Enthält die Kreisscheibe K: $|z-\alpha|\leqq r$ die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und genügt der reelle Teil der Zahl $C=A+iB$ der Ungleichung $0\leqq 2A\leqq n$, so enthält K die Nullstellen jedes Polynoms $g(z)$ von der Form*

$$g(z)=Cf(z)-(z-\alpha)f^*(z).$$

Ist $g(z_0)=0$, so folgt dieser Satz im Falle $f^*(z_0)=0$ aus dem verallgemeinerten Satz von Gauß und Lucas, weil dann auch $f(z_0)=0$ ist. Ist $f^*(z_0)\neq 0$, so ist

$$\zeta_0^*=z_0-n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)}=z_0-n\frac{z_0-\alpha}{C}.$$

Wäre nun $|z_0-\alpha|>r$, so wäre

$$|\zeta_0^*-\alpha|=|z_0-\alpha|\left|\frac{C-n}{C}\right|>r\left|\frac{C-n}{C}\right|=r\left[\frac{(A-n)^2+B^2}{A^2+B^2}\right]^{\frac{1}{2}}\geqq r,$$

weil $n-A\geqq A\geqq 0$ ist. Damit ist der Satz VII bewiesen, weil beide Punkte z_0 und ζ_0^* außerhalb der Kreisscheibe K nicht liegen können.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von G. PÓLYA und G. SZEGŐ[7]:

VIII. *Liegt jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades im Kreisring*

$$r\leqq|z-\alpha|\leqq R,$$

und ist $C\neq -n$, so besitzt kein Polynom von der Form

$$g(z)=Cf(z)-(z-\alpha)f^*(z)$$

eine Nullstelle außerhalb des Kreisringes

$$r_1=r\,\mathrm{Min}\left[1,\left|\frac{C}{C-n}\right|\right]\leqq|z-\alpha|\leqq R_1=R\,\mathrm{Max.}\left[1,\left|\frac{C}{C-n}\right|\right].$$

Wäre eine Nullstelle z_0 des Polynoms $g(z)$ innerhalb des Kreises $|z-\alpha|=r_1$ bzw. außerhalb des Kreises $|z-\alpha|=R_1$ gelegen, so müßte der Polarpunkt ζ_0^* des Punktes z_0 in bezug auf das Polynom $f(z)$ innerhalb des Kreises $|z-\alpha|=r$ bzw. außerhalb des Kreises $|z-\alpha|=R$ fallen. Sind nämlich $g(z_0)=0$ und $f(z_0)\neq 0$, so sind $f^*(z_0)\neq 0$ und

$$\zeta_0^*-\alpha=z_0-\alpha-n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)}=z_0-\alpha-n\frac{z_0-\alpha}{C}=(z_0-\alpha)\frac{C-n}{C}.$$

Ist also $|z_0-\alpha|<r_1$ bzw. $|z_0-\alpha|>R_1$, so ist

$$|\zeta_0^*-\alpha|=|z_0-\alpha|\left|\frac{C-n}{C}\right|<r_1\left|\frac{C-n}{C}\right|\leqq r$$

$$\text{bzw.}\quad|\zeta_0^*-\alpha|=|z_0-\alpha|\left|\frac{C-n}{C}\right|>R_1\left|\frac{C-n}{C}\right|\geqq R.$$

[7]) A. a. O., S. 58, Aufgaben 116–117.

Damit ist der Satz VIII bewiesen, weil man in beiden Fällen durch z_0 und ζ_0^* Kreise führen kann, von denen die Nullstellen von $f(z)$ nicht getrennt werden.

6. Einige Resultate von mir[8]) lassen sich so ausdrücken:

IX. *Bedeuten λ_1 und λ_2 beliebige (reelle oder nichtreelle) Zahlen, sind ζ_1 und ζ_2 von den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abweichende (verschiedene oder zusammenfallende) Nullstellen des Polynoms*

$$g(z) = \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f^*(z)$$

und bezeichnet H eine beliebige gleichseitige Hyperbel, die durch die Punkte ζ_1 und ζ_2 geht und den Punkt $\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}$ zum Mittelpunkt besitzt, so trennt die Hyperbel H die Nullstellen des Polynoms $f(z)$.

Dieser Satz gilt auch für eine mehrfache Nullstelle $\zeta_1 = \zeta_2$ des Polynoms $g(z)$, wenn $f(\zeta_1) \neq 0$ ist.

X. *Enthält die Kreisscheibe $|z-a| \leq r$ die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades und bedeuten λ_1 und λ_2 beliebige Zahlen, so enthält die konzentrische Kreisscheibe $|z-a| \leq r\sqrt{2}$ mindestens $n-1$ Nullstellen jedes Polynoms*

$$g(z) = \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f^*(z). \quad (|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0).$$

7. Hat ein Polynom lauter reelle Nullstellen, so liegt ein Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ $(y_0 \neq 0)$ und sein Polarpunkt $\zeta_0^* = \xi_0 + i\eta_0$ in bezug auf das Polynom an entgegengesetzten Seiten der reellen Achse $(y_0\eta_0 < 0)$. Daraus folgen die Sätze:

XI. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen, die auf der Strecke (A, B) liegen, und ist c eine nichtreelle Zahl, so enthält das Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, $C-nc$ und $B-nc$ die Nullstellen der Polynome $g(z) = f(z) + c\,f^*(z)$.*

In einer nichtreellen Nullstelle z_0 des Polynoms $g(z)$ sind

$$f^*(z_0) \neq 0, \; f(z_0) + cf^*(z_0) = 0 \text{ und } \zeta_0^* = z - n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)} = z_0 + nc.$$

Die Gerade g durch z_0 und ζ_0^* trennt nach Satz I die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ und deshalb schneidet die reelle Achse in einem Punkte z_1 der Strecke (A, B). Der Punkt z_1 liegt zwischen z_0 und ζ_0^*, die an entgegengesetzten Seiten der reellen Achse sind. Daraus folgt der Satz XI, weil die Strecke $(z_0, z_0 + nc)$ mit der Strecke (A, B) einen Punkt gemeinsam haben muß.

---

8) Gy. Sz.-Nagy, Ein elementargeometrischer Satz und seine Anwendung in der Geometrie der Polynome, *Anzeiger Ung. Akad. Wiss.*, **61** (1942), S. 776—785; Sur un théorème de M. Biernacki, *Annales de la Société Polonaise de Math.*, **23** (1950).

Verallgemeinerung bei M. Marden, On the zeros of rational functions having proscribed poles, with applications of an entire function of finite genre, *Transactions American Math. Soc.*, **66** (1949), S. 407—418.

XII. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen und bedeuten A, B und $C(<0)$ reelle Zahlen, so liegen die nichtreellen Nullstellen der Polynome*

$$g(z)=f(z)+(A+Bz+Cz^2)f^*(z)$$

in der Halbebene $x=\operatorname{Re} z>-\dfrac{1+nB}{2nC}$.

In einer nichtreellen Nullstelle $z_0=x_0+iy_0$ dieses Polynoms ist

$$\zeta_0^*=\xi_0+i\eta_0=z_0-n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)}=z_0+n(A+Bz_0+Cz_0^2).$$

Der Satz XII folgt aus der Ungleichung

$$y_0\eta_0=y_0^2(1+nB+2nCx_0)<0.$$

XIII. *Besitzt das Polynom $f(z)$ n-ten Grades lauter reelle Nullstellen, bedeuten a, A, B und C reelle Zahlen mit $C<0$, $D=1+nB>0$, so hat*

$$g(z)=f(z)+\left[A+Bz+\frac{C}{z-a}\right]f^*(z)$$

lauter reelle Nullstellen. Ist $0<nCD^{-1}=r^2$, so liegen die nichtreellen Nullstellen der Polynome $g(z)$ innerhalb bzw. außerhalb des Kreises $|z-a|=r$, jenachdem $D\gtrless 0$ bzw. $D<0$ ist.[9]

In einer nichtreellen Nullstelle $z_0=x_0+iy_0$ des Polynoms $g(z)$ sind

$$\zeta_0^*=\xi_0+i\eta_0=z_0-n\frac{f(z_0)}{f^*(z_0)}=z_0+n\left(A+Bz_0+\frac{C}{z_0-a}\right) \text{ und } y_0\eta_0<0.$$

Hieraus ergibt sich

$$y_0\eta_0=y_0^2\left[D-\frac{nC}{(x-a)^2+y_0^2}\right]=Dy_0^2\left[1-\frac{nC}{D}\cdot\frac{1}{|z_0-a|^2}\right].$$

Sind $D>0$ und $C<0$, so ist $y_0\eta_0>0$. Dann kann also das Polynom $g(z)$ keine nichtreelle Nullstelle haben. Im Falle $0<nCD^{-1}=r^2$ ist

$$y_0\eta_0=y_0^2D\left[1-\frac{r^2}{|z_0-a|^2}\right].$$

Die Ungleichung $y_0\eta_0<0$ besteht also nur dann, wenn $D>0$ und $|z_0-a|<r$, oder $D<0$ und $|z_0-a|>r$ sind.

8. Die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von L. BERWALD läßt sich ebenso beweisen, wie der originelle Satz[10]), wo die isobare Derivierte $f'(z)$ steht:

---

[9]) Der Satz XIII enthält einen speziellen Satz von LAGUERRE, a. a. O., in sich.

[10]) L. BERWALD, Über die Lage der Nullstellen von Linearkombinationen eines Polynoms und seiner Ableitungen in bezug auf einen Punkt, *Tôhoku Math. Journal,* **37** (1933), S. 52—68.

XIV. *Enthält ein Kreisbereich K die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades, so liegen die Nullstellen der Polynome*

$$g(z)=c_0 f(z)+c_1[nf(z)+(\alpha-z)f^*(z)]\equiv(c_0+nc_1)f(z)+c_1(\alpha-z)f^*(z)$$

$(|c_0|+|c_1|\neq 0)$ *in K und in einem Kreisbereich K', in den K durch die lineare Transformation*

$$z'=\alpha+\frac{c_0+nc_1}{c_0}(z-\alpha)$$

überführt wird. Haben K und K' keinen Punkt gemeinsam, so hat ein Polynom $g(z)$ eine Nullstelle in K' und die übrigen Nullstellen in K.

Auch die Nullstellen der anisobaren Derivierten eines Polynoms sind Brennpunkte einer algebraischen Kurve $(n-1)$-ter Klasse, von der die Verbindungsstrecke von je zwei Nullstellen des Polynoms berührt wird.

Dies läßt sich ebenso einsehen, wie für die isobare Derivierte[11]).

9. Der folgende Satz über reelle gebrochene rationale Funktionen enthält den Satz V in sich.

XV. *Bezeichnen $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ bzw. $b, q, q_1, q_2, \ldots, q_n$ reelle bzw. positive Zahlen und ist $Q=q_1+q_2+\ldots+q_n$, so liegen die nichtreellen Nullstellen der rationalen Funktionen von der Form*

$$R(z)=\frac{q}{z-a-ib}+\frac{q}{z-a+ib}+\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{z-c_k}$$

im Kreise

$$|z-a|<b\sqrt{\frac{Q}{Q+2q}}<b\,\frac{Q+q}{Q+2q}.$$

Dieser Satz läßt sich ebenso beweisen, wie der Satz V.

Sind nämlich

$$f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-c_k),\quad \varrho Q=n,\quad p_k=\varrho q_k \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

so ist

$$\varrho R(z)=\frac{2\varrho q(z-a)}{(z-a)^2+b^2}+\frac{f^*(z)}{f(z)}.$$

Eine nichtreelle Nullstelle $z_0=x_0+iy_0$ von $R(z)$ hat einen Polarpunkt $\zeta_0^*=\xi_0+i\eta_0$ in bezug auf das Polynom $f(z)$. Aus der Ungleichung $y_0\eta_0<0$ folgt der Satz XV ohne Weiteres.

(Eingegangen am 29. Juni 1949.)

---

[11]) Vgl. die Literatur in der Arbeit: M. Marden, A note on the zeros of the sections of a partial fraction, *Bulletin of the American Math. Society*, **51** (1945), S. 935–940.