Sur un théorème de T. Szele.

Par J.-P. SERRE à Paris.

Appelons *corps premier* un corps n'ayant d'autre sous-corps que lui-même; on sait que tout corps premier est isomorphe, soit au corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, soit au corps $\mathbf{Z}/(p)$ des entiers modulo p, où p est un nombre premier. Tout corps, commutatif ou non, contient un corps premier et un seul.

1. On a le

Théorème 1. *Les groupes additifs des corps premiers sont les seuls groupes abéliens $\mathfrak{G}$ jouissant de la propriété:*

(E_2) *Tout endomorphisme de $\mathfrak{G}$ distinct de 0 est un automorphisme.*

T. SZELE, à qui ce théorème est dû[1]), l'avait démontré en utilisant des résultats de BAER sur les groupes abéliens. En voici une démonstration plus élémentaire:

Soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des endomorphismes de $\mathfrak{G}$; d'après la propriété (E_2) c'est un corps et $\mathfrak{G}$ se trouve donc muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche sur $\mathfrak{A}$, donc aussi sur le corps premier $\mathbf{P}$ contenu dans $\mathfrak{A}$. On vérifie immédiatement que tout endomorphisme de $\mathfrak{G}$ est $\mathbf{P}$-linéaire; le $\mathbf{P}$-espace vectoriel $\mathfrak{G}$ doit donc être tel que tous ses endomorphismes (non nuls) soient des automorphismes, ce qui n'est possible que s'il est de dimension 1, ce qui achève la démonstration.

2. La méthode de démonstration précédente s'applique à d'autres problèmes analogues. Par exemple, démontrons le théorème suivant:

Théorème 2. *Pour qu'un groupe abélien $\mathfrak{G}$ soit isomorphe au groupe additif d'un espace vectoriel (sur un corps quelconque), il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions équivalentes suivantes:*

(E_3) *Tout sous-groupe $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$, possédant la propriété que $e(\mathfrak{H})\subseteq\mathfrak{H}$ pour tous les endomorphismes e de $\mathfrak{G}$, est égal à $\{0\}$ ou à $\mathfrak{G}$.*

(E_4) *Quels que soient $x, y\in\mathfrak{G}$, tous deux différents de 0, il existe un automorphisme s de $\mathfrak{G}$ tel que $s(x)=y$.*

Il est clair que (E_4) entraîne (E_3) et que le groupe additif d'un espace vectoriel vérifie (E_4). Nous avons donc seulement à montrer que tout groupe abélien $\mathfrak{G}$ vérifiant (E_3) est le groupe additif d'un espace vectoriel.

Or, soit $\mathfrak{G}$ un tel groupe, $\mathfrak{A}$ l'anneau de ses endomorphismes et $\mathfrak{K}$ le centre de $\mathfrak{A}$. Si $u\in\mathfrak{K}$ $(u\neq 0)$, les sous-groupes $u(\mathfrak{G})$ et $u^{-1}(0)$,

[1]) T. SZELE, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, *ces Acta*, **13** (1949), p. 54—56.

— ce dernier est le "noyau" (Kern) de u — possèdent la propriété formulée dans la condition (E_3), comme le montre un calcul immédiat. Il résulte alors de (E_3) que u est un automorphisme, c'est-à-dire que $\mathfrak{K}$ est un *corps*[2]). Le groupe $\mathfrak{G}$ se trouve alors muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. Pour qu'un groupe abélien $\mathfrak{G}$ soit isomorphe au groupe additif d'un espace vectoriel, il faut et il suffit qu'il soit somme directe de sous-groupes tous isomorphes au groupe additif d'un même corps premier. En particulier, si $\mathfrak{G}$ est *fini*, il est isomorphe à $\mathbf{Z}/(p) + \ldots + \mathbf{Z}/(p)$.

3. On vient de voir que les propriétés (E_3) et (E_4) étaient équivalentes pour un groupe *abélien* $\mathfrak{G}$. Il n'en va plus de même en général comme le montre l'exemple d'un groupe simple fini, qui vérifie toujours (E_3) mais jamais (E_4) s'il n'est abélien[3]).

4. On peut généraliser les résultats précédents en considérant, au lieu de groupes abéliens, des *modules unitaires* sur un anneau commutatif $\mathfrak{C}$ à élément unité. Les propriétés (E_i) $(i = 2, 3, 4)$ gardent un sens, à condition d'entendre par endomorphisme et automorphisme, un endomorphisme et un automorphisme de la structure de $\mathfrak{C}$-module.

Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{C}$, distinct de $\mathfrak{C}$ mais non nécessairement de $\{0\}$; on sait que $\mathfrak{p}$ est dit *premier* si $\mathfrak{C}/\mathfrak{p}$ est un anneau d'intégrité. Dans ce cas, nous appellerons $\mathbf{Q}_p$ le corps des fractions de l'anneau $\mathfrak{C}/\mathfrak{p}$; l'image de $\mathfrak{C}$ dans $\mathbf{Q}_p$ engendre $\mathbf{Q}_p$, et réciproquement, tout corps jouissant de cette propriété peut être obtenu de cette manière. On notera que tout espace vectoriel sur $\mathbf{Q}_p$ (et en particulier $\mathbf{Q}_p$ lui-même) peut être considéré comme un $\mathfrak{C}$-module.

Ces notations étant posées, on a:

Théorème 1'. *Tout $\mathfrak{C}$-module vérifiant (E_2) est isomorphe à l'un des $\mathfrak{C}$-modules $\mathbf{Q}_p$.*

Théorème 2'. *Pour qu'un $\mathfrak{C}$-module soit isomorphe à un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{Q}_p$, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions équivalentes (E_3) et (E_4).*

Les démonstrations étant entièrement analogues à celles données plus haut dans le cas des groupes abéliens (où $\mathfrak{C} = \mathbf{Z}$, anneau des entiers), il n'a pas été jugé utile de les reproduire.

(Reçu le 12 juin 1950)

---

[2]) Le lecteur reconnaîtra là le raisonnement classique du lemme de Schur.

[3]) Le problème de déterminer tous les groupes vérifiant la condition (E_4) m'a été posé par M. P. JAFFARD qui l'avait résolu dans le cas où le groupe $\mathfrak{G}$ considéré est fini, mais n'est pas supposé commutatif. En fait, il montrait que $\mathfrak{G}$ est nécessairement commutatif en utilisant la propriété bien connue des p-groupes d'avoir un centre non réduit à l'élément neutre.