Über drei wichtige Gruppen.

Von T. SZELE in Debrecen und I. SZÉLPÁL in Szeged.

Unter einer Gruppe verstehen wir im folgenden stets eine additive Abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}^+$, $\mathfrak{Z}(p)$, $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ bzw. die Additionsgruppe des rationalen Zahlkörpers, die Gruppe p-ter Ordnung und PRÜFERS Gruppe „vom Typ (p^∞)" [1]), definiert als die durch die unendlich vielen Elemente $A_1, A_2, \ldots$ von der Eigenschaft

$$(1) \qquad A_1 \neq 0, \; pA_1 = 0, \; pA_2 = A_1, \; pA_3 = A_2, \ldots$$

erzeugte Gruppe. Dabei bezeichnet p eine beliebige Primzahl. Diese drei Gruppen [2]) besitzen gewiße merkwürdige Extremaleigenschaften, durch welche sie sowohl einzeln als auch in ihrer Gesamtheit — sogar auch jedes Paar von ihnen — unter allen Gruppen ausgezeichnet sind. Diesbezüglich führen wir folgende bekannte Tatsachen a)—f) an:

a) $\mathfrak{Z}(p)$ ist die einzige Gruppe ohne eigentliche Untergruppen.

b) $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ ist die einzige unendliche Gruppe mit lauter endlichen echten Untergruppen. [15].

c) $\mathfrak{R}^+$ ist der (eindeutig bestimmte) „Träger" sämtlicher *lokal-zyklischer* [3]) Gruppen in dem Sinne, daß die Menge der lokal-zyklischen Gruppen mit derjenigen der homomorphen Bilder der Untergruppen von $\mathfrak{R}^+$ übereinstimmt [6], [7].

d) $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft, daß jedes homomorphe Bild (mit mehr als einem Element) von $\mathfrak{G}$ isomorph zu $\mathfrak{G}$ ist [14]. — Außerdem sind diese Gruppen auch die sämtlichen nicht-torsionsfreien Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring [10].

e) $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{R}^+$ sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft, daß jeder vom Nulloperator verschiedene Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ ein Automorphismus ist [9], [8]. — Außerdem sind dieselben Gruppen auch als die Additionsgruppen der Primkörper gekennzeichnet.

---

[1]) Siehe die Arbeit [5]. Die eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Note.

[2]) Genauer gesprochen bezeichnen $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ je eine Klasse von unendlich vielen Gruppen.

[3]) Nach KUROSCH nennt man eine Gruppe lokal-zyklisch, falls jedes endliche System ihrer Elemente in einer zyklischen Untergruppe enthalten ist.

f) $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}^+$ sind die sämtlichen minimalen *algebraisch-abgeschlossenen*[4]) Gruppen [16], [2], [11]. — Folglich sind sie nach einem wichtigen Satz von BAER auch durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet: Diese Gruppen — aber keine echten Untergruppen von ihnen — sind direkte Summanden von jeder sie enthaltenden Gruppe [1], [3].

Zweck dieser kleinen Note ist zu zeigen, daß die erwähnten drei wichtigen Gruppen auch eine gemeinsame charakteristische Eigenschaft haben. Nennen wir nämlich nach BAER [4] eine Gruppe *vollständig invariant*, wenn sie durch jeden — vom Nulloperator verschiedenen — Endomorphismus *auf* sich abgebildet wird, so gilt der

Satz. $\mathfrak{Z}(p)$, $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ *und* $\mathfrak{R}^+$ *sind die sämtlichen vollständig invarianten Abelschen Gruppen*[5]).

Der Beweis ergibt sich durch eine einfache Kombination der in [9] und [14] verwendeten Schlüße. Sei $\mathfrak{G}$ eine vollständig invariante Gruppe. Da die Abbildung $X \to nX$ $(X \in \mathfrak{G})$ für eine ganze Zahl n ein Endomorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, gilt für jedes n entweder $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, oder $n\mathfrak{G} = \{0\}$. Demnach unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: *Es gebe ein* n (>0) *mit* $n\mathfrak{G} = \{0\}$. Dann muß das kleinste solche $n = p$ eine Primzahl sein[6]). Auf Grund von $p\mathfrak{G} = \{0\}$ hat in diesem Falle jedes Element $\neq 0$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ordnung p und somit zerfällt $\mathfrak{G}$ in eine direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Für eine vollständig invariante Gruppe vom Typ $\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{G}^*$ gilt aber notwendigerweise $\mathfrak{G}^* = \{0\}$. In diesem Falle ergibt sich also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p)$.

Zweiter Fall: *Es gelte für jedes* n (>0) *die Gleichung* $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Dann gilt auch für die Untergruppe $\mathfrak{T}$ bestehend aus sämtlichen Elementen endlicher Ordnung von $\mathfrak{G}$ offenbar $n\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$. Ist also $\mathfrak{T} \neq \{0\}$, so folgt aus $p\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ für ein Element A_1 von der Primzahlordnung p die Existenz einer Folge von Elementen $A_2, A_3, \ldots$ in $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft (1). Diese Elemente erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ in $\mathfrak{G}$, die nach BAER[7]) ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist. In $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^\infty) + \mathfrak{G}^*$ muß aber der Summand $\mathfrak{G}^*$ (wie oben) verschwinden, woraus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^\infty)$ folgt. — Im entgegengesetzten Fall $(\mathfrak{T} = \{0\})$ enthält die torsionsfreie

---

4) In vollständiger Analogie mit der Theorie der kommutativen Körper kann man eine Gruppe $\mathfrak{G}$ algebraisch-abgeschlossen nennen, wenn alle Gleichungen $nX = A \in \mathfrak{G}$ eine Lösung X in $\mathfrak{G}$ besitzen, d. h. wenn $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. BAER [2] nennt die Gruppen von dieser Eigenschaft „komplett". Wir wollen aber die obige Bezeichnung beibehalten, denn die Abelschen Gruppen weisen in dieser Hinsicht eine tiefgehende Analogie mit der Steinitzschen Körpertheorie auf [11].

5) Gleichwertig damit ist: Die obigen drei Gruppen sind die sämtlichen Abelschen Gruppen ohne homomorphe eigentliche Untergruppen.

6) Vgl. [9].

7) Vgl. [1] Theorem 1. 1, S. 766.

algebraisch-abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ nach [9] eine Untergruppe $\mathfrak{R}^+$, die nach BAER[7]) ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist. In der Darstellung $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^+ + \mathfrak{G}^*$ verschwindet aber der Summand $\mathfrak{G}^*$, womit $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}^+$ also auch der Satz bewiesen ist.

Bemerkung. Die obigen drei Gruppen spielen auch in einer ganz anderen Hinsicht eine ausgezeichnete Rolle. Betrachten wir alle möglichen Typen von (nicht notwendig kommutativen) Ringen, die eine gegebene Gruppe $\mathfrak{G}$ zur Additionsgruppe haben, die sich also auf $\mathfrak{G}$ „aufbauen" lassen. Offenbar läßt sich auf jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Ring „von trivialer multiplikativen Struktur" — üblicherweise *Zeroring* genannt — aufbauen, indem nämlich jedes Elementenprodukt gleich Null ist. Nun sind die direkten Summen $\Sigma \mathfrak{Z}(p_\varkappa^\infty)$ unter allen nicht-torsionsfreien Gruppen dadurch ausgezeichnet, daß sich auf ihnen nur ein einziger Ring (der Zeroring) aufbauen läßt [12]. Die Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{R}^+$ haben in dieser Hinsicht die kennzeichnende Eigenschaft, daß sich auf ihnen genau zwei Ringtypen, von denen der eine nullteilerfrei (sogar Körper) ist, aufbauen lassen [13].

Literatur.

[1] R. BAER, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Annals of Math.*, (2) **37** (1936), S. 766—781.

[2] R. BAER, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. Journal*, **3** (1937), S. 68—122.

[3] R. BAER, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group *Bulletin American Math. Society*, **46** (1940), S. 800—806.

[4] R. BAER, The higher commutator subgroups of a group, *Bulletin American Math. Society*, **50** (1944), S. 143—160.

[5] H. PRÜFER, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **17** (1923), S. 35—61.

[6] H. PRÜFER, Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften, *Math. Zeitschrift*, **20** (1924), S. 165—187.

[7] L. RÉDEI und T. SZELE, Die Ringe „ersten Ranges", *diese Acta*, **12 A** (1950), S. 18—29.

[8] J.-P. SERRE, Sur un théorème de T. Szele, *diese Acta*, **13** (1950), S. 190—191.

[9] T. SZELE, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, *diese Acta*, **13** (1949), S. 54—56.

[10] T. SZELE, Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 89—91.

[11] T. SZELE, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, *Journal für die reine u. angew. Math.* (im Erscheinen).

[12] T. SZELE, Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Annalen*, **121** (1949), S. 242—246.

[13] T. SZELE, Gruppentheoretische Beziehungen der Primkörper, *Math. Zeitschrift* (im Erscheinen).

[14] I. SZÉLPÁL, Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *diese Acta*, **13** (1949), S. 51—53.

[15] I. SZÉLPÁL, Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 63—64.

[16] L. ZIPPIN, Countable torsion groups, *Annals of Math.*, (2) **36** (1935), S. 86—99.

(Eingegangen am 16. August 1950.)