Produit complet de groupes de permutations et problème d'extension de groupes III.*)

Par Marc Krasner et Léo Kaloujnine à Paris.

§ 6. Le problème de Schreier.

1. Soient Γ, g deux groupes abstraits. Dans tout ce paragraphe on notera les éléments de Γ par des minuscules grecques et ceux de g par des minuscules latines. En particulier, les unités de Γ et de g seront désignées par ε et par e.

Soit G un groupe qui possède un sous-groupe invariant $\bar{G}$, tel que $\bar{G}$ soit isomorphe au groupe g et tel que $G/\bar{G}$ soit isomorphe à Γ. Etant donné un isomorphisme de $\bar{G}$ sur g et un isomorphisme de $G/\bar{G}$ sur Γ, on identifie $\bar{G}$ avec g et $G/\bar{G}$ avec Γ en identifiant les éléments qui se correspondent par ces isomorphismes donnés. Le groupe G, avec ces identifications, est dit *une extension de g par Γ*. Une extension de g par Γ est donc définie à un (Γ, g)-isomorphisme près.

Le problème de Schreier consiste

1) *à construire à partir de g et de Γ un ensemble Ω d'extensions G de g par Γ, tel que toute extension G' de g par Γ soit (Γ, g)-isomorphe à au moins un $G \in \Omega$ (on parlera dans ce cas d'un système complet d'extensions de g par Γ);*

2) *à déterminer un critère de (Γ, g)-isomorphie de deux extensions appartenant à Ω.*

A une différence de terminologie et de notations près, la méthode de Schreier pour résoudre ce problème est la suivante[1]):

G étant une extension de g par Γ, on va supposer, pour plus de simplicité, que $\bar{G}$ coïncide avec g. Soit $\varrho(\xi)$ une fonction représentative de Γ dans G.[2]) La donnée de $\varrho(\xi)$ definit deux autres fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ $(\alpha, \xi \in \Gamma)$. $\omega(\xi)$ est, pour tout $\xi \in \Gamma$, l'automorphisme $x \to \varrho(\xi)^{-1} x \varrho(\xi) = x^{\omega(\xi)}$

---

*) Les parties I et II ont parû dans *ces Acta*, **13** (1950), p. 208—230, et **14** (1951), p. 39—66.

[1]) Pour plus de détails voir le livre de H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig, 1937).

[2]) $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t$ étant une chaîne de sous-groupes d'un groupe G telle que G_{i-1}/G_i soit, pour tout i, identifié avec un ensemble M_i, si $i_1, i_2, \ldots, i_t$ est une suite par-

induit sur le sous-groupe invariant g de G par l'automorphisme intérieur $(\varrho(\xi)^{-1})$ de G; $c(\alpha, \xi)$ est, pour tous les $\alpha, \xi \in \Gamma$, le produit $\varrho(\alpha\xi)^{-1}\varrho(\alpha)\varrho(\xi)$ ($c(\alpha, \xi)$ est donc une fonction, définie sur $\Gamma \times \Gamma$ et à valeurs dans g). Dans l'ensemble produit $\Gamma \times g$, dans lequel on a identifié tout $x \in g$ avec (ε, x) et tout $\xi \in \Gamma$ avec l'ensemble $\{\xi\} \times g$, SCHREIER définit à l'aide des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ une loi de composition, et démontre que $\Gamma \times g$, organisé par cette loi de composition, est un groupe H isomorphe à G. Si, en particulier, $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée (c'est-à-dire si $\varrho(\varepsilon) = e$), ce groupe H est (Γ, g)-isomorphe à G, et un (Γ, g)-isomorphisme est réalisé par l'application $\varrho(\xi)x \to (\xi. x)$ de G sur H. Dans le cas général d'une fonction représentative $\varrho(\xi)$ non nécessairement normée on peut également établir un (Γ, g)-isomorphisme de G sur H, en modifient convenablement, dans $\Gamma \times g$, l'identification de g avec $\{\varepsilon\} \times g$.

D'autre part, la loi de composition sur $\Gamma \times g$ ainsi définie par SCHREIER à l'aide des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ a un sens quelle que soit la fonction $\omega(\xi)$ (définie sur Γ et à valeurs dans le groupe des automorphismes de g) et la fonction $c(\alpha, \xi)$ (définie sur l'ensemble $\Gamma \times \Gamma$ et à valeurs dans g). Mais, en général, l'ensemble $\Gamma \times g$, organisé par une telle loi de composition, n'est pas un groupe, mais seulement un quasi-groupe (loop)[3][4]. Pour que la structure, définie à partir des $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$, soit un groupe, il faut et il suffit que les fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ satisfassent à certaines conditions (qui traduisent l'associativité de la loi de composition). SCHREIER a explicité ces conditions. Deux fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ satisfaisant à ces conditions s'appellent un *système de facteurs (de Schreier)*.

Si $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ constituent un système S de facteurs, ils définissent sur $\Gamma \times g$ une structure de groupe H_S. Schreier démontre qu'avec une identification convenable de g avec $\{\varepsilon\} \times g$, H_S est une extension de g par Γ, et

---

tielle de $1, 2, \ldots, s$, on dira qu'on a défini une *fonction représentative* des M_{i_q} $(q = 1, 2, \ldots, t)$ dans G quand on aura defini, pour tout $q = 1, 2, \ldots, t$ et pour tout $x_{i_q} \in M_{i_q}$, un élément $\varrho(x_{i_q})$ de la classe à droite suivant G_{i_q} dans $G_{i_q} - 1$ identifiée avec x_{i_q}. $\varrho(x_{i_q})$ sera dite *normée* si, pour tout $q = 1, 2, \ldots, t$, $\varrho(m_{i_q})$ (ou m_{i_q} est identifié avec G_{i_q}) est l'unité de G. Il est à remarquer qu'en vertu du lemme 2 (§ 5), le ϱ-isomorphisme η_ϱ ne dépend pas de $\varrho(x_s)$, car $G^*_{s,s} = G_s$. Ainsi, il est entièrement défini par la donnée de la fonction représentative $\bar{\varrho}(x_i)$ des $M_1, M_2, \ldots M_{s-1}$ seulement dans G, et sera dit aussi le $\bar{\varrho}$-isomorphisme.

[3]) Rappelons qu'un quasi-groupe est une structure algébrique satisfaisant aux axiomes des groupes à l'exception de l'associativité.

[4]) On peut même supposer que les $\omega(\xi)$ sont des endomorphismes (et non forcément des automorphismes) de g, auquel cas on n'obtient sur $\Gamma \times g$ que la structure d'un monoïde. Nous employons ce mot "monoïde" non au sens de BOURBAKI [qui désigne ainsi, dans son *Algèbre* I (Paris, 1942) un ensemble organisé par une loi de composition (binaire) associative et partout définie], mais au sens d'un ensemble organisé par une loi de composition (binaire) *non nécessairement associative*. Le monoïde au sens de BOURBAKI a déjà un nom, celui de *demi-groupe*, qui nous paraît tout à fait satisfaisant.

que $\omega(\xi)$ et $\omega(\alpha, \xi)$ sont des fonctions ainsi notées pour la fonction représentative $\varrho(\xi) = (\xi, e)$ de Γ dans H_S.

La théorie de SCHREIER fait donc correspondre à chaque fonction représentative $\varrho(\xi)$ de Γ dans quelque extension G de g par Γ (considérée à un (Γ, g)-isomorphisme près) un système de facteurs S_ϱ. Tous les systèmes de facteurs peuvent s'obtenir de cette manière. Inversement, à chaque système de facteurs S, cette théorie fait correspondre une extension bien déterminée H_S (dont le support est l'ensemble $\Gamma \times g$) de g par Γ. Si, pour quelque fonction représentative $\varrho(\xi)$ de Γ dans G, on a $S = S_\varrho$, H_S est (Γ, g)-isomorphe à G.

Pour deux systèmes de facteurs S et S' différents, H_S et $H_{S'}$ sont deux groupes distincts. H_S et $H_{S'}$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement si $S' = S_\varrho$ pour quelque fonction représentative $\varrho(\xi)$ de Γ dans H_S. SCHREIER explicite la condition à laquelle doivent satisfaire S et S' pour qu'il en soit ainsi, ce qui achève la résolution de son problème par sa méthode.

Ainsi, dans la théorie de SCHREIER, un système complet Ω d'extensions de g par Γ est un ensemble de groupes, définis sur le support fixe $\Gamma \times g$ à l'aide des différents systèmes de facteurs. Ω est le sous-ensemble d'un ensemble $\overline{\Omega}$ de quasi-groupes définis sur $\Gamma \times g$ par des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ quelconques. Les conditions, explicitées par SCHREIER (auxquelles doivent satisfaire $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ pour être un système de facteurs) servent précisément à caractériser l'ensemble Ω dans $\overline{\Omega}$.

2. $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ étant le produit complet des groupes abstraits $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, nous appelons un sous-groupe transitif $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$ *schreierien* si $\overline{G}_s$ se réduit à l'unité e de $\mathfrak{G}$.

Montrons qu'*un sous-groupe schreierien représentatif $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$ possède une et une seule fonction superposante.*

En effet, en vertu du lemme 2, deux fonctions représentatives normées $\bar{\varrho}(x_i)$ et $\bar{\varrho}'(x_i)$ des Γ_i dans $\overline{G}$ fournissent une même immersion de $\overline{G}$ dans $\mathfrak{G}$ si, et seulement si, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, et pour tout $x_i \in \Gamma_i$, $\bar{\varrho}(x_i)^{-1}\bar{\varrho}'(x_i)$ appartient au plus grand sous-groupe $\overline{G}_{s,i}$ de $\overline{G}_s$ invariant dans $\overline{G}_i$. Or, $\overline{G}$ étant schreierien, $\overline{G}_s$, et à fortiori $\overline{G}_{s,i}$, se réduisent à l'unité de $\mathfrak{G}$, et on doit avoir $\bar{\varrho}'(x_i) = \bar{\varrho}(x_i)$. Ainsi, il n'y a qu'une fonction représentative normée au plus, qui réalise une immersion donnée de $\overline{G}$ dans $\mathfrak{G}$. En particulier, il y a au plus une fonction superposante et, si $\overline{G}$ est représentatif, il y en a bien une.

Remarquons qu'en vertu du § 5 (alinéa 6), pour $s = 2$, tout sous-groupe transitif, donc en particulier, tout sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ est représentatif.

3. Ceci posé, notre théorème d'immersion (§ 4, alinéa 5) (pour le cas des suites de composition) et les résultats du § 5 nous permettent de donner une autre solution du problème de SCHREIER qui est, en quelque sorte, duale à la précédente.

Si G est une extension de g par Γ, et si $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée de Γ dans G, G est (Γ, g)-isomorphe à son image $\overline{G}$ dans $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$ par le ϱ-isomorphisme η_ϱ, et, en vertu du Lemme 1, l'image $\bar{\varrho}(\xi)$ de $\varrho(\xi)$ par η_ϱ est une fonction superposante de $\overline{G}$. $\overline{G}$ est, visiblement, un sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$. D'ailleurs, si $\overline{G}$ est un sous-groupe schreierien quelconque de $\Gamma \circ g$, et si $\bar{\varrho}(\xi)$ en est une fonction superposante, le $\bar{\varrho}$-isomorphisme l'applique identiquement sur lui-même. Ainsi, le théorème d'immersion fait correspondre à toute extension G de g par Γ, quand on y choisit une fonction représentative $\varrho(\xi)$, un couple formé d'un sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$ et de son unique fonction superposante. Les images ainsi obtenus parcourent l'ensemble de tous les sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ et de leurs fonctions superposantes. D'autre part, le théorème 5 montre que deux sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement s'ils sont proprement conjugués.

Dès lors, pour donner une solution du problème de Schreier, il suffit de caractériser explicitement les sous-groupes schreieriens $\overline{G}$ de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$. Or, la donnée de $\overline{G}$ équivaut (en vertu de l'unicité de sa fonction superposante) à la donnée de $\overline{G}_1$ et de sa fonction superposante $\bar{\varrho}(\xi)$, car $\overline{G} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \varrho(\xi) \overline{G}_1$. $\overline{G}_1$ est un sous-groupe de ${}^1\Delta$ tel que $\overline{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \overline{G}_2$ se réduise à l'unité, et qui est, par l'identification canonique, identifié avec g; et $\bar{\varrho}(\xi)$ est une fonction représentative de Γ dans $\mathfrak{G}$. Quand $\overline{G}_1$ parcourt *tous les* sous-groupes des $\mathfrak{G}$ de cette forme, et quand $\bar{\varrho}(\xi)$ parcourt *toutes* les fonctions de cette forme, $\overline{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi) \overline{G}_1$ parcourt une certaine catégorie de sous-ensembles de $\mathfrak{G}$. Les sous-groupes schreieriens $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$, avec leurs fonctions superposantes sont parmi les ensembles $\overline{T}$ de cette catégorie avec la fonction $\bar{\varrho}(\xi)$ qui a servi à les définir. Si un tel $\overline{T}$ est un sous-groupe $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$, il est visiblement transitif, car pour ce groupe on a $\overline{\Gamma}_1 = \Gamma_1 = \Gamma$ et $\overline{\Gamma}_2 = \Gamma_2 = g$, et schreierien, car $\overline{G}_2$ se réduit à l'unité de $\mathfrak{G}$. Ainsi, pour trouver tous les sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$, chacune prise une seule fois, il suffit de caractériser, parmi les systèmes $\overline{G}_1$, $\bar{\varrho}(\xi)$ de la forme considérée, ceux d'entre eux pour lesquels $\overline{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi) \overline{G}_1$ est un groupe dont $\bar{\varrho}(\xi)$ est une fonction superposante.

Or, si $\overline{G}$ est un groupe de la forme considérée, son élément que l'identification canonique identifie avec un $x \in g$ est, écrit comme un tableau, de la forme

$$\bar{x} = [\varepsilon, a_x(\xi)].^{5)}$$

---

5) Il est à remarquer que $\overline{G}_1$ n'est autre chose que l'ensemble des valeurs de l'unique fonction représentative de g dans $\overline{G}_1$ et que $\bar{x}$ est précisément sa valeur pour x. Ainsi, puisque la donnée d'une fonction représentative $\varrho(\xi)$, $\varrho(x)$ des Γ, g dans $\overline{G}$ détermine $\overline{G} = \{\varrho(\xi)\ \varrho(x)\}_{(\xi, x) \in \Gamma \times g}$, quand $\overline{G}$ est un sous-groupe schreierien de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$, on peut résoudre le problème de Schreier en caractérisant les fonctions superposantes

Comme l'identification canonique applique cet élément sur $a_x(\varepsilon)$, on a donc $a_x(\varepsilon) = x$. Puisque, d'autre part, $x \to \bar{x}$ est un isomorphisme, on a

$$[\varepsilon, a_{xy}(\xi)] = [\varepsilon, a_x(\xi)]\,[\varepsilon, a_y(\xi)] = [\varepsilon, a_x(\xi)\,a_y(\xi)],$$

d'où, pour tout $\xi \in \Gamma$ et pour tous $x, y \in g$, on a

$$a_{xy}(\xi) = a_x(\xi)\,a_y(\xi).$$

Donc, pour tout $\xi \in \Gamma$, $x \to a_x(\xi)$ est un endomorphisme $\omega(\xi)$ de g. En particulier, $\omega(\varepsilon)$ est l'automorphisme identique 1_g de g.

Inversement, si $\omega(\xi)$ est une fonction définie sur Γ et dont les valeurs sont des endomorphismes de g, l'ensemble des $\bar{x} = [\varepsilon, x^{\omega(\xi)}]$[5a]) est un sous-groupe $\bar{G}_1$ de ${}^1\Delta$ tel que $\bar{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ se réduit à l'unité. Si en plus on a $\omega(\varepsilon) = 1_g$, l'identification canonique applique $\bar{x}$ sur x. Comme $\bar{G}_1$ et $\omega(\xi)$ se déterminent mutuellement, on voit que la donnée de $\bar{G}_1$ équivaut à celle de $\omega(\xi)$, et que $\omega(\xi)$ parcourt toutes les fonctions de la forme indiquée quand $\bar{G}_1$ parcourt tous les sous-groupes considérés de ${}^1\Delta$.

$\bar{\varrho}(\xi)$ étant une fonction représentative de Γ dans $\mathfrak{G}$, $\bar{\varrho}(\alpha)$, quand on l'écrit comme un tableau, est visiblement de la forme $[\alpha, a_\alpha(\xi)]$. Si l'on pose, pour tous $\alpha, \xi \in \Gamma$, $c(\alpha, \xi) = a_\alpha(\xi)$, on voit que la donnée de $\bar{\varrho}(\xi)$ équivaut à celle d'une fonction $c(\alpha, \xi)$, définie sur $\Gamma \times \Gamma$ et à valeurs dans g, et, quand $\bar{\varrho}(\xi)$ parcourt toutes les fonctions représentatives de Γ dans $\mathfrak{G}$, $c(\alpha, \xi)$ parcourt toutes les fonctions définies sur $\Gamma \times \Gamma$ et à valeurs dans g. La signification immédiate des fonctions $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ dans notre théorie est, visiblement, la suivante: $\mathfrak{G}$ contient une extension canonique $\bar{G}^*$ de g par Γ, à savoir celle qui a été identifiée avec $\Gamma \times g$ au § 2, et qui est formée par les tableaux $[\alpha, a(\xi)]$ tels que $a(\xi)$ soit une constante $a \in g$. L'élément $\bar{x}^* = [\varepsilon, a_x^*(\xi)]$ de $\bar{G}^*$ identifié avec x est, donc, tel que, pour tout $\xi \in \Gamma$, on a $a_x^*(\xi) = x$. Par suite, $\omega(\xi)$ est l'endomorphisme qui transforme la ξ-composante $a_x^*(\xi)$ de $\bar{x}^*$ en celle $a_x(\xi)$ de $\bar{x}$. D'autre part, la fonction superposante de $\bar{G}^*$ est $\bar{\varrho}^*(\xi) = [\xi, e]$. Donc,

$$\bar{\varrho}(\alpha) = [\alpha, c(\alpha, \xi)] = [\alpha, e]\,[\varepsilon, c(\alpha, \xi)] = \bar{\varrho}^*(\alpha)\,[\varepsilon, c(\alpha, \xi)].$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in \Gamma$, $[\varepsilon, c(\alpha, \xi)]$ est le facteur à droite, par lequel il faut

---

des sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ dans l'ensemble des fonctions représentatifs (ou même, seulement superposantes) des Γ, g dans $\mathfrak{G}$. C'est, d'ailleurs, ainsi que nous envisageons plus bas, au dernier alinéa de ce paragraphe, la généralisation du problème de Schreier au cas $s > 2$. Nous avons adopté un point le vue légèrement différent dans notre exposé ci-dessus, afin de mettre clairement en évidence la dualité de notre méthode à celle de Schreier.

5a) On écrit, comme c'est habituel dans la théorie d'opérateurs, x^ω au lieu de $\omega . x$. Il est à remarquer que, vu la convention habituelle pour la composition d'applications $\omega_1 \omega_2 \cdot x = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot x)$, on a $x^{\omega_1 \omega_2} = (x^{\omega_2})^{\omega_1}$. Rappelons aussi que si (c) est un automorphisme intérieur d'un groupe g induit par un $c \in g$, et si ω est un autre automorphisme du groupe, on a $\omega(c)\omega^{-1} = (c^\omega)$.

multiplier $\bar{\varrho}^*(\alpha)$ pour obtenir $\bar{\varrho}(\alpha)$. On dira que $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ est le *système des fonctions associé au couple* $\bar{G}_1$, $\bar{\varrho}(\xi)$.

Pour que $\bar{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi) \bar{G}_1$ soit un groupe et pour que $\bar{\varrho}(\xi)$ en soit la fonction superposante, il faut et il suffit que les $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ correspondantes satisfassent à certaines conditions. Quand on explicite ces conditions on trouve qu'elles coïncident avec les conditions de SCHREIER pour que $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ soit un système de facteurs normé de SCHREIER.

Après coup, on constate aussi que, si ces conditions sont satisfaites, $\omega(\xi)$ est toujours un automorphisme (et non seulement un endomorphisme) de g, et que *le couple* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *est, en plus de son signification directe, le système de facteurs de Schreier relatif à la fonction représentative* $\bar{\varrho}(\xi)$ *de* Γ *dans* $\bar{G}$ (qui est précisément la fonction superposante de $\bar{G}$). Si $\bar{G}$ est l'image, par un ϱ-isomorphisme η_ϱ normé, d'une extension G de g par Γ, $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ est aussi le système de facteurs relatif à la fonction représentative normée $\varrho(x_i)$ de Γ dans G. On a donc

$$\bar{\varrho}(\alpha)^{-1} [\varepsilon, a_x(\xi)] \, \bar{\varrho}(\alpha) = [\varepsilon, a_{x\omega(\alpha)}(\xi)]$$

et

$$\bar{\varrho}(\alpha\beta)^{-1} \, \bar{\varrho}(\alpha) \, \bar{\varrho}(\beta) = [\varepsilon, a_{c(\alpha,\beta)}(\xi)].$$

Ainsi, dans le cas où $\bar{T}$ est un groupe, la signification des $\omega(\xi)$ et $c(\alpha, \xi)$ dans notre méthode et dans celle de SCHREIER coïncident. Cette coïncidence fournit une dualité entre les propriétés internes des sous-groupes schreieriens de $\Gamma \circ g$ et leurs propriétés externes par rapport au sous-groupe canonique $\Gamma \times g$ de $\Gamma \circ g$.

D'ailleurs, cette coïncidence n'est pas un effet de hasard, car le calcul effectif d'un ϱ-isomorphisme montre comment le système de facteurs de la fonction $\varrho(\xi)$ intervient dans l'expression de l'image de G, écrit sous forme d'un groupe de tableaux. On aboutit ainsi *à une correspondance biunivoque entre les systèmes de facteurs de Schreier et les sous-groupes schreieriens de* $\Gamma \circ g$. Ceci montre, en particulier, que les immersions dans $\Gamma \circ g$ de deux extensions de g par Γ conduisent à un même groupe si, et seulement si les fonctions représentatives réalisant ces immersions ont un même système de facteurs.

Mais quand le couple $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ n'est pas un système de facteurs, les significations de ces fonctions dans la théorie de SCHREIER et dans la nôtre sont essentiellement différentes. Les conditions de SCHREIER s'y présentent de deux manières en quelque sorte duales: Dans la théorie de Schreier elles expriment qu'une loi de composition d'un monoïde *à support fixe* $\Gamma \times g$ est telle que ce monoïde soit un groupe, extension de g par Γ (en particulier, si l'on a supposé déjà que, pour tout $\xi \in \Gamma$, $\omega(\xi)$ est un automorphisme de g, les conditions de SCHREIER expriment que cette loi de composition est associative). Par contre, dans notre théorie, les mêmes conditions expriment qu'un sous-ensemble $\bar{T}$ du *monoïde fixe* $\Gamma \circ g$ (qui est un groupe) est fermé par rapport à sa loi de composition (auquel cas il est surement une extension de g par Γ) et qu'une fonction $\bar{\varrho}(\xi)$ à valeurs dans $\Gamma \circ g$ en est une fonction superposante. Ainsi, dans notre théorie, le système complet Ω d'extensions de g par Γ est l'ensemble des sous-groupes schreieriens de $\Gamma \circ g$. Ω est un sous-ensemble de l'ensemble $\bar{\Omega}$ de tous les sous-ensembles de la forme $\bar{T} = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \bar{\varrho}(\xi)\,\bar{G}_1$. Les conditions de SCHREIER servent à caractériser Ω dans $\bar{\Omega}$. On voit clairement la dualité de deux méthodes.

Le fait que deux sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G} = \Gamma \circ g$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement si l'un est le transformé de l'autre par un $\lambda \in \mathfrak{G}_2$, permet, en calculant l'effet de la transformation par un $\lambda \in \mathfrak{G}_2$ sur la fonction superposante et sur les éléments $\bar{x}$ d'un sous-groupe schreierien $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, d'établir le critère de Schreier pour l'équivalence des systèmes de facteurs. Ce critère se présente également d'une manière en quelque sorte duale à celle de Schreier.

4. Complétons ce qu'on vient d'esquisser, en démontrant ce qui a été énoncé.

Soit $\omega(\xi)$ une fonction définie sur Γ et dont les valeurs sont des endomorphismes de g telle que $\omega(\varepsilon)$ soit l'automorphisme identique, et soit $c(\alpha, \xi)$ une fonction définie sur l'ensemble $\Gamma \times \Gamma$ et à valeurs dans g. Considérons l'ensemble $\bar{G}_1$ des tableaux de la forme

$$\bar{x} = [\varepsilon, a_x(\xi) = x^{\omega(\xi)}] \qquad (x \in g)$$

$\bar{G}_1$ est un groupe. $\bar{\varrho}(\alpha)$ $(\alpha \in \Gamma)$ étant le tableau $[\alpha, a_\alpha(\xi) = c(\alpha, \xi)]$, posons $\bar{T} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bar{\varrho}(\alpha\ \bar{G}_1$. *Supposons que $\bar{T}$ soit un groupe $\bar{G}$.* Alors on a, visiblement, $\bar{G} \cap \mathfrak{G}_1 = \bar{G} \cap {}^1\Delta = \bar{G}_1$ et $\bar{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ se réduit à l'unité de $\mathfrak{G}$. Les identifications canoniques appliquent $\bar{x}$ sur $a_x(\varepsilon) = x^{\omega(\varepsilon)} = x$ et $\bar{\varrho}(\alpha)\bar{G}_1$ sur $(\bar{\varrho}(\alpha))_1 = \alpha$. Par suite, on a $\bar{\Gamma}_1 = \Gamma$ et $\bar{\Gamma}_2 = g$, et ainsi, $\bar{G}$ est, dans ce cas, un sous-groupe transitif et schreierien de $\mathfrak{G}$, donc est une extention de g par Γ.

$\bar{G}$ étant transitif, quelque soit $\xi \in \Gamma$, il existe, pour tout $y \in g$, un $\sigma = [\alpha, a(x)] \in \bar{G}$, qui transforme (ξ, e) en (ξ, y). On a donc $\alpha\xi = \xi$ et $a(\xi)\,e = y$. Ainsi $\alpha = \varepsilon$, d'où on conclut que σ appartient à $\bar{G}_1$ et est égal à $\bar{x}$ pour quelque $x \in g$. Par suite, on a $a(\xi) = x^{\omega(\xi)}$ et il existe, pour tout $y \in g$, un $x \in g$ tel que $y = x^{\omega(\xi)}$. Donc, pour tout $\xi \in \Gamma$, *$\omega(\xi)$ n'est pas seulement un endomorphisme, mais un automorphisme de g.*

$\bar{G}_1$ étant invariant dans $\bar{G}$, quelque soit $\alpha \in \Gamma$, il existe, pour tout $x \in g$, un $x' \in g$ (dépendant en principe de α et de x) tel qu'on ait

$$\bar{x}\bar{\varrho}(\alpha) = \bar{\varrho}(\alpha)\bar{x}',$$

c'est-à-dire que

$$[\alpha, x^{\omega(\alpha\xi)}c(\alpha, \xi)] = [\varepsilon, x^{\omega(\xi)}][\alpha, c(\alpha, \xi)] = [\alpha, c(\alpha, \xi)][\varepsilon, x'^{\omega(\xi)}] = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,x'^{\omega(\xi)}].$$

Donc, pour tout $\xi \in \Gamma$, on a

$$x^{\omega(\alpha\xi)} c(\alpha, \xi) = c(\alpha, \xi)\, x'^{\omega(\xi)};$$

autrement dit, (c) étant l'automorphisme intérieur $x \to cxc^{-1}$ de g induit par $c \in g$, on a

$$x^{\omega(\alpha\xi)} = (x'^{\omega(\xi)})^{(c(\alpha,\xi))} = x'^{(c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)}.$$

En particulier, si l'on pose $\xi = \varepsilon$, on a

$$x^{\omega(\alpha)} = x'^{(c(\alpha,\varepsilon))\,\omega(\varepsilon)} = x'^{(c(\alpha,\varepsilon))},$$

car $\omega(\varepsilon) = 1_g$, d'où

$$x' = (x^{\omega(\alpha)})^{(c(\alpha,\varepsilon))^{-1}} = x^{(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha)},$$

et pour tous $\alpha, \xi \in \Gamma$ et $x \in g$, on a

$$x^{\omega(\alpha\xi)} = [x^{(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha)}]^{(c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)} = x^{(c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)\,(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha)};$$

d'où, pour tous $\alpha, \xi \in \Gamma$, on a

$$\omega(\alpha\xi) = (c(\alpha,\xi))\,\omega(\xi)\,(c(\alpha,\varepsilon)^{-1})\,\omega(\alpha),$$

ce qui équivaut à la condition

$$\text{(A')} \qquad \boxed{\omega(\xi)\,(c(\alpha,\varepsilon))^{-1}\,\omega(\alpha) = (c(\alpha,\xi))^{-1}\,\omega(\alpha\xi)}.$$

D'autre part, on a pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$,

$$\bar{\varrho}(\alpha)\,\bar{\varrho}(\beta) \equiv \bar{\varrho}(\alpha\beta) \qquad (\text{mod } \bar{G}_1).$$

Il existe donc un $x \in g$ (dépendant des α, β) tel que

$$\bar{\varrho}(\alpha)\,\bar{\varrho}(\beta) = \bar{\varrho}(\alpha\beta)\,\bar{x},$$

ou, d'une manière explicite,

$$[\alpha\beta, c(\alpha, \beta\xi)\, c(\beta,\xi)] = [\alpha, c(\alpha,\xi)]\,[\beta, c(\beta,\xi)] = [\alpha\beta, c(\alpha\beta,\xi)]\,[\varepsilon, x^{\omega(\xi)}] =$$
$$= [\alpha\beta, c(\alpha\beta,\xi)\, x^{\omega(\xi)}].$$

Autrement dit, on a, pour tout $\xi \in \Gamma$,

$$c(\alpha, \beta\xi)\, c(\beta,\xi) = c(\alpha\beta,\xi)\, x^{\omega(\xi)}.$$

En particulier, si $\xi = \varepsilon$, on a

$$c(\alpha,\beta)\, c(\beta,\varepsilon) = c(\alpha\beta,\varepsilon)\, x^{\omega(\varepsilon)} = c(\alpha\beta,\varepsilon)\, x.$$

c'est-à-dire

$$x = c(\alpha\beta,\varepsilon)^{-1}\, c(\alpha,\beta)\, c(\beta,\varepsilon),$$

et on obtient, pour tous $\alpha, \beta, \xi \in \Gamma$, la condition

$$\text{(B')} \qquad \boxed{c(\alpha,\beta\xi)\, c(\beta,\xi) = c(\alpha\beta,\xi)\,[c(\alpha\beta,\varepsilon)^{-1}\, c(\alpha,\beta)\, c(\beta,\varepsilon)]^{\omega(\xi)}}.$$

En particulier, si $\alpha = \beta = \varepsilon$, cette condition s'écrit

$$c(\varepsilon,\xi)\, c(\varepsilon,\xi) = c(\varepsilon,\xi)\,[c(\varepsilon,\varepsilon)^{-1}\, c(\varepsilon,\varepsilon)\, c(\varepsilon,\varepsilon)]^{\omega(\xi)},$$

ce qui équivaut à

$$c(\varepsilon,\xi) = c(\varepsilon,\varepsilon)^{\omega(\xi)}.$$

Inversement, montrons que si $\omega(\xi)$ et $c(\alpha,\xi)$ satisfont aux conditions (A') et (B′), $\bar{T}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. En effet, il est visible que (A′) entraîne, pour tout $\alpha \in \Gamma$, $\bar{G}_1 \bar{\varrho}(\alpha) \subseteq \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{G}_1$ et que (B′) entraîne que, pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$, on a $\bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{\varrho}(\beta) \in \bar{\varrho}(\alpha\beta)\, \bar{G}_1$. Dès lors, on a

$$\bar{T}\bar{T} = \Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{G}_1\Big)\Big(\bigcup_{\beta\in\Gamma} \bar{\varrho}(\beta)\, \bar{G}_1\Big) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma} \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{G}_1 \bar{\varrho}(\beta)\, \bar{G}_1 \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma} \bar{\varrho}(\alpha)\, \bar{\varrho}(\beta)\, \bar{G}_1 \bar{G}_1 \subseteq \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma} \bar{\varrho}(\alpha\beta) \bar{G}_1 \bar{G}_1 \bar{G}_1 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{\varrho}(\gamma)\, \bar{G}_1 = \bar{T}.$$

D'autre part, pour montrer que l'inverse de tout $\sigma \in \bar{T}$ y appartient, il suffit, étant donné que $\bar{G}_1$ est, par hypothèse, un groupe, de montrer que tout $\bar{\varrho}(\alpha)^{-1}$ est dans $\bar{T}$, c'est-à-dire qu'il est de la forme $\bar{\varrho}(\alpha^{-1})\,\bar{x}$ pour quelque $x \in g$ (dépendant, évidemment, de α). Or, l'égalité $\bar{\varrho}(\alpha)^{-1} = \bar{\varrho}(\alpha^{-1})\bar{x}$ équivaut à

$$[\alpha^{-1}, c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)^{-1}] = [\alpha^{-1}, c(\alpha^{-1}, \xi)]\,[\varepsilon, x^{\omega(\xi)}] = [\alpha^{-1}, c(\alpha^{-1}, \xi)\, x^{\omega(\xi)}],$$

c'est-à-dire, pour tout $\xi \in \Gamma$, à l'égalité

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)^{-1} = c(\alpha^{-1}, \xi)\, x^{\omega(\xi)},$$

ou

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = x^{-\omega(\xi)}.$$

En particulier, pour $\xi = \varepsilon$, cette égalité s'écrit

$$c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon) = x^{-1},$$

et, si l'on prend $x = [c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{-1}$ déterminé par cette égalité, la condition considérée s'écrit

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = [c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)}.$$

Or, si l'on pose $\beta = \alpha^{-1}$, la condition (B′) s'écrit

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = c(\varepsilon, \xi)\, [c(\varepsilon, \varepsilon)^{-1}\, c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)}$$

et, à l'aide de sa conséquence $c(\varepsilon, \xi) = c(\varepsilon, \varepsilon)^{\omega(\xi)}$, devient

$$c(\alpha, \alpha^{-1}\xi)\, c(\alpha^{-1}, \xi) = [c(\varepsilon, \varepsilon)\, c(\varepsilon, \varepsilon)^{-1}\, c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)} = [c(\alpha, \alpha^{-1})\, c(\alpha^{-1}, \varepsilon)]^{\omega(\xi)}.$$

Ainsi, la condition pour que $\varrho(\alpha)^{-1}$ appartienne à $\bar{T}$, est une conséquence de la condition (B′), et $\bar{T}$ est bien un groupe $\bar{G}$ quand (A′) et (B′) sont satisfaites.

Nous avons vu que le fait que $\bar{T}$ est un groupe entraîne que, pour tout $\xi \in \Gamma$, $\omega(\xi)$ est un automorphisme de g. Ainsi, ce fait est une conséquence des conditions (A′) et (B′). On peut, d'ailleurs, voir qu'il résulte déjà directement de la condition (A′), où l'on pose $\alpha = \xi^{-1}$.

5. En vertu du théorème 4, $\bar{\varrho}(\xi)$ $(\xi \in \Gamma)$ est une fonction superposante de $\mathfrak{G}$ (et, quand $\bar{T}$ est un groupe $\bar{G}$, de $\bar{G}$) si, et seulement si $\bar{\varrho}(\alpha)$ conserve la seconde coordonnée x de tout élément de $\Gamma \times g$ qui est de la forme (ε, x). Or, on a $\bar{\varrho}(\alpha) \cdot (\varepsilon, x) = [\alpha, c(\alpha, \xi)] \cdot (\varepsilon, x) = [\alpha\varepsilon, c(\alpha, \varepsilon)\, x]$. Ainsi, la condition nécessaire est suffisante pour que $\bar{\varrho}(\xi)$ soit une fonction superposante est

(C) pour tout $\alpha \in \Gamma$, $c(\alpha, \varepsilon) = e$ [6])

Si cette condition est satisfaite, les conditions (A′) et (B′) se simplifient et deviennent

(A) $$\omega(\xi)\,\omega(\alpha) = (c(\alpha, \xi))^{-1}\,\omega(\alpha\xi)$$

et

(B) $$c(\alpha, \beta\xi)\,c(\beta, \xi) = c(\alpha\beta, \xi)\,c(\alpha, \beta)^{\omega(\xi)}.$$

On reconnaît les conditions de SCHREIER. $\bar{T}$ *est un groupe* $\bar{G}$ *et* $\bar{\varrho}(\xi)$ *en est la fonction superposante si, et seulement si* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *est un système de facteurs de Schreier* (conditions (A) et (B)), *qui est normé* (condition (C)).

6. Soient G une extension de g par Γ et $\varrho(\xi)$ une fonction représentative de Γ dans G. Soit

$$\omega(\xi) = \{x \longrightarrow \varrho(\xi)^{-1}\,x\,\varrho(\xi)\} \qquad (x \in g)$$

et $c(\alpha, \xi) = \varrho(\alpha\xi)^{-1}\,\varrho(\alpha)\,\varrho(\xi)$ le système de facteurs de cette fonction $\varrho(\xi)$. Calculons le ϱ-isomorphisme η_ϱ de G dans $\Gamma \circ g$.

Soient $\sigma = \varrho(\alpha)\,a \in G$ et $X = \varrho(\xi)\,x \in G/G_\varepsilon = G$ $((\alpha, \xi \in \Gamma;\ a, x \in g)$. Alors on a

$$\theta_\varrho \cdot X = (\xi, x)$$

et

$$\sigma X = \varrho(\alpha)\,a\,\varrho(\xi)\,x = \varrho(\alpha)\,\varrho(\xi)\,a^{\omega(\xi)}\,x = \varrho(\alpha\xi)\,c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}\,x.$$

Par suite, on a

$$\theta_\varrho \cdot \sigma X = (\alpha\xi, c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}\,x) = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}] \cdot (\xi, x).$$

Ainsi, l'image dans $\mathfrak{G}$ de σ par η_ϱ, mis sous la forme de tableau, est

$$\eta_\varrho \cdot \sigma = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,a^{\omega(\xi)}].$$

Soit $\bar{G} = \eta_\varrho \cdot G$ l'image de G par η_ϱ. Alors, $\bar{G}_1 = \bar{G} \cap {}^1\Delta$ est l'ensemble des éléments

$$\bar{x} = \eta_\varrho \cdot \varrho(\varepsilon)\,x = [\varepsilon, c(\varepsilon, \xi)\,x^{\omega(\xi)}]$$

$\bar{x}$ est appliqué par l'isomorphisme canonique sur $c(\varepsilon\ \varepsilon)\,x^{\omega(\varepsilon)}$. Si $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée, on a

$$\omega(\varepsilon) = \{x \longrightarrow exe^{-1}\} = 1_g \text{ et } c(\varepsilon, \xi) = \varrho(\xi)^{-1}\,\varrho(\varepsilon)\,\varrho(\xi) = \varrho(\xi)^{-1}\,e\,\varrho(\xi) = e.$$

Par suite, dans ce cas, on a

$$\bar{x} = [\varepsilon, x^{\omega(\xi)}],$$

et l'identification canonique applique $\bar{x}$ sur $ex^{1_g} = x$. D'autre part, on a

$$\bar{\varrho}(\alpha) = \eta_\varrho \cdot \varrho(\alpha) = \eta_\varrho \cdot \varrho(\alpha)e = [\alpha, c(\alpha, \xi)\,e^{\omega(\xi)}] = [\alpha, c(\alpha, \xi)]^{\varrho};$$

on voit donc que, si $\varrho(\xi)$ est une fonction représentative normée de Γ dans G, *le système de facteurs de* $\varrho(\xi)$ *coïncide avec le système de fonctions* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *associé, dans notre méthode, à l'image* $\bar{G}$ *de* G *par le* ϱ*-isomorphisme.*

---

[6]) On sait que si $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ est un système de facteurs de SCHREIER, cette condition est nécessaire et suffisante pour qu'il soit normé.

D'autre part, nous savons que tout sous-groupe schreierien de $\Gamma \circ g$ est représentatif et est sa propre image à l'aide de son unique fonction superposante. On voit ainsi, *que le système de fonctions* $\omega(\xi)$, $c(\alpha, \xi)$ *associé à* $\overline{G}$ *est le système de facteurs de toute fonction représentative* $\varrho(\xi)$, *qui immerge dans* $\Gamma \circ g$ *une extension* G *de* g *par* Γ *de manière à l'appliquer sur* $\overline{G}$. *En particulier, c'est le système de facteurs associé à la fonction superposante* $\overline{\varrho}(\xi)$ *de* G (ce qui se vérifie aussi facilement par le calcul direct).

7. Soient $\overline{G}$ et $\overline{\overline{G}}$ deux sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$, et soient $\overline{\omega}(\xi)$, $\overline{c}(\alpha, \xi)$ et $\overline{\overline{\omega}}(\xi)$, $\overline{\overline{c}}(\alpha, \xi)$ les systèmes de fonctions qui leur sont associés. $\overline{G}$ et $\overline{\overline{G}}$ sont (Γ, g)-isomorphes si, et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathfrak{G}_2$ tel que $\overline{\overline{G}} = \lambda \overline{G} \lambda^{-1}$.

Par définition, $\mathfrak{G}_2$ est le groupe des tableaux de la forme

$$[\varepsilon, l(\xi)]$$

tels que $l(\varepsilon) = e$. Si λ est un tel tableau, l'élément de $\overline{\overline{G}}_1$, où $\overline{\overline{G}}_1 = \overline{\overline{G}} \cap {}^1\Delta = \lambda \overline{G} \lambda^{-1} \cap \lambda\, {}^1\Delta \lambda^{-1} = \lambda(\overline{G} \cap {}^1\Delta)\lambda^{-1} = \lambda \overline{G}_1 \lambda^{-1}$, identifié canoniquement avec x, est

$$[\varepsilon, x^{\overline{\overline{\omega}}(\xi)}] = \overline{\overline{x}} = \lambda \overline{x} \lambda^{-1} = [\varepsilon, l(\xi)]\,[\varepsilon, x^{\overline{\omega}(\xi)}]\,[\varepsilon, l(\xi)^{-1}] = [\varepsilon, l(\xi)\, x^{\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}] =$$
$$= [\varepsilon, [x^{\overline{\omega}(\xi)}]^{(l(\xi))}] = [\varepsilon, x^{(l(\xi))\overline{\omega}(\xi)}].$$

Donc, on a

(E$_1$) $$\boxed{\overline{\overline{\omega}}(\xi) = (l(\xi))\, \overline{\omega}(\xi)}.$$

D'autre part, la fonction superposante $\overline{\overline{\varrho}}(\alpha)$ de $\overline{\overline{G}}$ est l'image par (λ) de quelque fonctions représentatives normée, d'ailleurs bien déterminée

$$\overline{\varrho}'(\alpha) = \overline{\varrho}(\alpha)\, x_\alpha = [\alpha, \overline{c}(\alpha, \xi)]\,[\varepsilon, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}] = [\alpha, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}] \quad (x_\alpha \in g)$$

de Γ dans $\overline{G}$.

On a

$$\lambda \overline{\varrho}'(\alpha) \lambda^{-1} = [\varepsilon, l(\xi)]\,[\alpha, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}]\,[\varepsilon, l(\xi)^{-1}] = [\alpha, l(\alpha\xi)\, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}].$$

Donc

$$\overline{\overline{c}}(\alpha, \xi) = l(\alpha\xi)\, \overline{c}(\alpha, \xi)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\xi)}\, l(\xi)^{-1}.$$

Mais, pour que $\overline{\overline{\varrho}}(\alpha)$ soit une fonction superposante, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \Gamma$, on ait

$$\overline{\overline{c}}(\alpha, \varepsilon) = e;$$

autrement dit, puisque $\overline{\varrho}(\xi)$ est déjà supposée une fonction superposante, c'est-à-dire telle que $\overline{c}(\alpha, \varepsilon) = e$, on a

$$l(\alpha)\, \overline{c}(\alpha, \varepsilon)\, x_\alpha^{\overline{\omega}(\varepsilon)}\, l(\varepsilon)^{-1} = l(\alpha)\, x_\alpha = e,$$

ce qui équivaut à

$$x_\alpha = l(\alpha)^{-1}$$

et à

(E$_2$) $$\boxed{\overline{\overline{c}}(\alpha, \xi) = l(\alpha\xi)\, \overline{c}(\alpha, \xi)\, l(\alpha)^{-\omega(\xi)}\, l(\xi)^{-1}}$$

Inversement, si deux systèmes de fonctions $\bar{\omega}, \bar{c}$ et $\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{c}}$, satisfaisant aux conditions A), B), C) de l'alinéa 5 de ce §, sont tels qu'il existe une fonction $l(\xi)$ définie sur Γ et à valeurs dans g et telle que $l(\varepsilon)=e$, de manière que $\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}, \bar{c}, \bar{\bar{c}}$ et $l(\xi)$ satisfassent aux conditions E_1, E_2, les groupes schreieriens auxquelles ces systèmes sont associés sont *(Γ, g)-isomorphes*. Plus précisément, on a $\bar{\bar{G}}=\lambda\bar{G}\lambda^{-1}$, où $\lambda=[\varepsilon, l(\xi)]$; et $\bar{G}$ est appliqué sur $\bar{\bar{G}}$ par le $\bar{\varrho}'$-isomorphisme, où

$$\bar{\varrho}'(\xi)=\bar{\varrho}(\xi)\, l(\xi)^{-1}.$$

De tels systèmes de facteurs de Schreier $\bar{\omega}, \bar{c}$ et $\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{c}}$ sont dits *équivalents*. On voit qu'on retrouve par notre méthode le critère d'équivalence de Schreier.

8. Le système de facteurs

$$\bar{\bar{\omega}}(\xi)=(l(\xi))\,\bar{\omega}(\xi),\quad \bar{\bar{c}}(\alpha,\xi)=l(\alpha\xi)\,\bar{c}(\alpha,\xi)\,l(\alpha)^{-\omega(\xi)}\,l(\xi)^{-1}$$

sera dit le transformé de $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ par

$$\lambda=[\varepsilon, l(\xi)]\in\mathfrak{G}_2.$$

Visiblement, $\lambda\in\mathfrak{G}_2$ conserve le système des facteurs $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ associé à un sous-groupe schreierien $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}=\Gamma\circ g$ si, et seulement si $\lambda\bar{G}\lambda^{-1}=\bar{G}$, autrement dit si, et seulement si λ appartient au normalisateur $N(\bar{G})$ de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$. Ainsi, les $\lambda\in\mathfrak{G}_2$ qui conservent $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ forment un groupe, à savoir

$$N^*(\bar{G})=N(\bar{G})\cap\mathfrak{G}_2,$$

et deux éléments λ, λ' transforment $\bar{\omega}(\xi), \bar{c}(\alpha,\xi)$ en un même système si, et seulement s'ils appartiennent à une même classe à droite suivant $N^*(\bar{G})$.

Ainsi, l'ensemble des transformés d'un système de facteurs normé est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $S(\bar{G})=\mathfrak{G}_2/N^*(\bar{G})$ des classes à droite dans $\mathfrak{G}_2$ suivant le normalisateur $N^*(\bar{G})$ dans $\mathfrak{G}_2$ du sous-groupe $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, auquel est associé ce système de facteurs.

9. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ étant des groupes abstraits, soit G un groupe possédant une suite de composition (incomplète)

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_s$$

telle que, pour tout entier $i=1, 2, \ldots, s$, G_{i-1}/G_i soit isomorphe à Γ_i et que G_s se réduise à l'unité de G. Quand on identifie, de quelque manière bien déterminée, chaque G_{i-1}/G_i avec Γ_i, on dit que G, considéré avec ces identifications, est une *$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension*. Si la suite de composition considérée de G en est une suite normale, autrement dit si tout G_i est invariant dans G, G (considéré toujours avec les identifications indiquées) est dit une *$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension spéciale*. Pour $s=2$, ces deux notions se confondent avec celle de l'extension de Γ_2 par Γ_1, mais pour $s>2$, la seconde est un cas particulier de la première.

On peut se poser un problème analogue à celui de Schreier: construire explicitement un ensemble Ω de $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extensions tel que toute

$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension soit isomorphe à quelque élément de cet ensemble, et donner un critère explicite de la $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-isomorphie dans cet ensemble. En principe, par la méthode analogue à celle qu'on a employé pour $s=2$, il est possible, pour toute valeur de s, de donner la solution de ce problème, mais ceci au prix de calculs qui deviennent vite inextricables. Comme pour $s=2$, l'ensemble des groupes dont il s'agit est celui des sous-groupes schreieriens représentatifs de $\mathfrak{G}=\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$, car, si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des Γ_i dans une $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extension G, l'image $\overline{G}$ de G par le ϱ-isomorphisme est un tel sous-groupe de $\mathfrak{G}$, qui est $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-isomorphe à G. Contrairement au cas $s=2$, les sous-groupes schreieriens de $\mathfrak{G}$ ne sont pes toujours représentatifs, mais chaque sous-groupe schreierien représentatif $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$ possède une et un seule fonction superposante $\overline{\varrho}(x_i)$. On a évidemment

$$\overline{G}=\{\overline{\varrho}(x_1)\,\overline{\varrho}(x_2)\cdots\overline{\varrho}(x_3)\}_{x=(x_1, x_2, \ldots, x_s)\in\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_s},$$

et, si

$$\overline{\varrho}(\alpha_i)=[a_{\alpha_i}, a_{\alpha_i}(x_1), a_{\alpha_i}(x_1, x_2), \ldots, a_{\alpha_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$$

où $\alpha_i \in \Gamma_i$, on a (§. 5, alinéa 3)

$$\begin{aligned} a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}) &= e_j & \text{si } j<i, \\ a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}) &= \alpha_i, \\ a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, \alpha_i, \ldots, x_{j-1}) &= e_j & \text{si } j>i. \end{aligned}$$

Si l'on prend une fonction superposante quelconque $\overline{\varrho}(x_i)$ des Γ_i dans $\mathfrak{G}$, $\overline{G}=\{\overline{\varrho}(x_1)\,\overline{\varrho}(x_2)\ldots\overline{\varrho}(x_s)\}_{x\in\Gamma}$ n'est pas en général un groupe. Pour que cela arrive, il faut et il suffit que les fonctions $a_{\alpha_j}(x^{j-1})$ satisfassent à certaines égalités, dont le calcul ne présente d'autres difficultés que la longueur, qui le rend vite inextricable. D'ailleurs, si l'on ne considère que des $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-extensions spéciales, l'ensemble qu'on a à construire, pour résoudre le problème de SCHREIER pour de telles extensions plus particulières, est celui des sous-groupes schreieriens $\overline{G}$ de $\mathfrak{G}$ tels que, pour tout $i=1, 2, \ldots, s$, $\overline{G}_i$ soit invariant dans $\overline{G}$ (de tels sous-groupes schreieriens seront dits *spéciaux*), donc contenu dans ${}^i\Delta$. Par conséquent, sa fonction superposante $\overline{\varrho}(x_i)$ a, dans ce cas, la forme

$$\overline{\varrho}(\alpha_i)=[e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_{\alpha_i}(x^{i-1}), a_{\alpha_i}(x^i), \ldots, a_{\alpha_i}(x^{s-1})]$$

où $a_{\alpha_i}(e^{i-1})=\alpha_i$ et $a_{\alpha_i}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, \alpha_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1})=e_j$ pour $j>i$. Il s'agit donc, dans ce cas particulier, de trouver parmi de telles fonctions $a_{\alpha_i}(x^{i-1+f})$ $(i=1, 2, \ldots, s; f=1, 2, \ldots, s-i)$ celles, pour lesquelles $\overline{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante d'un sous-groupe schreierien spécial de $\mathfrak{G}$. Nous avons fait le calcul pour $s=3$; mais nous ne croyons pas utile d'en donner ici le résultat, qui, sous sa forme actuelle, a une apparence trop compliquée, et le lecteur, s'il s'arme de quelque patience, peut l'obtenir facilement lui-même. Mais nous sommes persuadés qu'il existe un algorithme (que nous n'avons pas pu trouver jusqu'à présent), qui permettrait de mettre ce calcul et ses résultats, pour un s quelconque, sous une forme simple dépendant de s comme d'un paramètre. Peut-être consiste-t-il en introduction d'un langage généralisant, d'une manière convenable, celui de la topologie combinatoire.

De même que pour $s=2$, si $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante d'un sous-groupe schreierien $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, les fonctions $a_{\alpha_i}(x^{j-1})$ ont, à la fois, une signification externe (position de $\bar{G}$ par rapport à $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_s$) et interne (composition des $\bar{\varrho}(x_i)$).

Deux sous-groupes schreieriens représentatifs $\bar{G}$ et $\bar{\bar{G}}$ de $\mathfrak{G}$ sont $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-isomorphes si, et seulement si $\bar{\bar{G}}$ est le transformé de $\bar{G}$ par un $\lambda \in G_s$ appartenant à l'ensemble $\Lambda(\bar{G})$, dont la détermination, à partir de $\bar{G}$ est faite par notre théorème 6, ce qui en montre l'importance. D'autre part, la détermination de la fonction superposante de $\lambda \bar{G} \lambda^{-1}$ $(\lambda \in \Lambda(\bar{G}))$ à partir de celle de $\bar{G}$, c'est-à dire le calcul de la "transformation" des $a_{\alpha_i}(x^{j-1})$, produite par un tel λ, ne présente pas d'autres difficultés que celle de longueur.

Il nous semble qu'il y a là un vaste champ de recherches.

(Reçu le 20 janvier 1949)