Beweis eines Abbildungssatzes von Béla Sz.-Nagy.

Von St. Vincze und P. Szüsz in Budapest.

Seien X und Y Mengen von Punkten eines metrischen Raumes. Eine Abbildung $y=f(x)$ von X auf Y heißt dehnungsbeschränkt, wenn das Verhältnis der Entfernungen

$$\varrho(y,y'):\varrho(x,x')$$

eine gewisse Schranke niemals überschreitet; dabei sind x und x' zwei beliebige Punkte von X und $y=f(x), y'=f(x')$.

Béla Sz.-Nagy hat die Frage aufgeworfen, ob jeder konvexe Körper K im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n als dehnungsbeschränktes Abbild einer abgeschlossenen n-dimensionalen (Voll)-Kugel C_n dargestellt werden kann? Er hat diese Frage bejahend, undzwar mit dem folgenden Satz beantwortet:

Satz. *Es sei O ein Punkt im Inneren des konvexen Körpers K und es bedeute C_n die (volle) Einheitskugel um O. Dann ist die „von O aus in allen Richtungen homothetische" Abbildung von C_n auf K dehnungsbeschränkt.*

Wenn man die Punkte $x, y, \ldots$ mit den Vektoren $X=\overrightarrow{Ox}$, $Y=\overrightarrow{Oy}, \ldots$ repräsentiert, was im folgenden stets geschehen soll, dann kann man diese Abbildung mit der folgenden Formel definieren:

$$Y=R(X_e)X,$$

wobei

$$X_e=\frac{X}{|X|}$$

den Einheitsvektor von X und $R(X_e)$ die Länge des Radiusvektors von O zum Rand von K in der Richtung von X_e bedeuten.

Verfasser, denen Herr Sz.-Nagy sein obiges Ergebnis mitteilte, haben dafür unabhängig einen elementaren Beweis gefunden, der auch gewisse Verallgemeinerungen gestattet, insbesondere auch auf unendlichdimensionale euklidische, d. h. Hilbertsche Räume, während der Beweis des Herrn Sz.-Nagy die Kompaktheit des Raumes wesentlich ausnützt. Wir werden darüber hinaus zeigen, daß die inverse Abbildung auch dehnungsbeschränkt ist. So gelangt in der vorliegenden Note, mit der freundlichen Übereinstimmung des Herrn SZ.-NAGY, sein Satz mit unserem Beweis zur Veröffentlichung, undzwar sogleich in der angedeuteten verallgemeinerten Form. An dieser Stelle möchten wir Herrn BÉLA SZ.-NAGY für seine wertvollen Bemerkungen unseren Dank ausdrücken.

§ 1.

Zuerst beweisen wir den

Satz 1. *Es sei $R(X_e)$ eine für alle Einheitsvektoren des n-dimensionalen Raumes E_n, d. h. auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel definierte Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:*

$$0 < m \leq R(X_e) \leq M, \tag{1}$$

$$\left| \frac{R(X_e') - R(X_e)}{\widehat{X_e' X_e}} \right| \leq L, \tag{2}$$

wo $\widehat{X_e' X_e}$ die sphärische Distanz bedeutet, d. h. $\widehat{X_e' X_e} = \arccos (X_e', X_e)$.

Dann gelten für die n-dimensionale Vektorfunktion

$$f(X) = R\left(\frac{X}{|X|}\right) X \quad (\textit{für } X \neq 0), \quad f(0) = 0$$

die Ungleichungen

$$\frac{m}{1 + \dfrac{\pi}{mL}} \leq \frac{|f(X') - f(X)|}{|X' - X|} \leq M + \pi L. \tag{3}$$

Durch $Y = f(X)$ wird offenbar die n-dimensionale (volle) Einheitskugel C_n stetig auf einen n-dimensionalen Bereich abgebildet. Die Bedingung (2) ist damit gleichbedeutend, daß die Oberfläche S_n von C_n dehnungsbeschränkt abgebildet wird. Dies folgt unmittelbar aus der Identität

$$|f(X_e') - f(X_e)|^2 = R(X_e')^2 + R(X_e)^2 - 2R(X_e')\, R(X_e) \cdot (X_e', X_e) =$$
$$= (R(X_e') - R(X_e))^2 + R(X_e')\, R(X_e)\, |X_e' - X_e|^2.$$

So besagt also unser Satz 1 in anderen Worten: *Aus* (1) *und aus der Dehnungsbeschränktheit unserer Abbildung auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel auch die Dehnungsbeschränktheit im Inneren der Einheitskugel folgt.*

In § 2 beweisen wir unseren Satz; in § 3 zeigen wir, wie aus Satz 1 der Satz von B. Sz.-Nagy folgt.

§ 2.

Es genügt, den Beweis für $n = 2$ zu führen. Man kann nämlich das Koordinatensystem so wählen, daß der O Punkt fest bleibt und die Vektoren X_e' und X_e in der Ebene zweier Koordinatenachsen liegen; dabei bleiben die Größen m, M und L invariant.

Es sei also $n=2$ und wir schreiben aus Zweckmäßigkeitsgründen komplexe Zahlen statt ebene Vektoren. In dieser Formulierung lautet unser Satz:

Ist $R(\vartheta)$ eine nach 2π periodische Funktion, für die

$$0 < m \leqq R(\vartheta) \leqq M \tag{1'}$$

und

$$\left|\frac{R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}\right| \leqq L \tag{2'}$$

ist, so gelten für die Funktion

$$f(z) = R(\vartheta)\, r e^{i\vartheta} \qquad (z = re^{i\vartheta})$$

die Ungleichungen

$$\frac{m}{1+\dfrac{\pi}{mL}} \leqq \left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leqq M+\pi L. \tag{3'}$$

Beweis: *a*) Aus Homogenitätsgründen dürfen wir

$$|z_1| \leqq 1, \qquad |z_2| = 1 \tag{4}$$

annehmen. Es sei $z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = e^{i\vartheta_2}$; die Winkel ϑ_1, ϑ_2 sollen so normiert werden, daß $|\vartheta_2-\vartheta_1| \leqq \pi$ ist.

Offenbar gilt

$$|f(z_2)-f(z_1)| \leqq \left|f(z_2)-f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)}\right| + \left|f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)} - f(z_1)\right|.$$

Es ist aber

$$\left|f(z_2)-f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)}\right| = |R(\vartheta_2)-R(\vartheta_1)| \leqq L|\vartheta_2-\vartheta_1|$$

und

$$\left|f(z_2)\frac{R(\vartheta_1)}{R(\vartheta_2)} - f(z_1)\right| = R(\vartheta_1)|z_2-z_1| \leqq M|z_2-z_1|,$$

also

$$|f(z_2)-f(z_1)| \leqq M|z_2-z_1| + L|\vartheta_2-\vartheta_1|.$$

Nun ist im Falle $0 \leqq |\vartheta_2-\vartheta_1| \leqq \frac{\pi}{2}$ wegen (4)

$$|z_2-z_1| \geqq \sin|\vartheta_2-\vartheta_1| \geqq \frac{2}{\pi}|\vartheta_2-\vartheta_1|$$

und im Falle $\frac{\pi}{2} < |\vartheta_2-\vartheta_1| \leqq \pi$ auf triviale Weise

$$|z_2-z_1| \geqq 1 \geqq \frac{|\vartheta_2-\vartheta_1|}{\pi},$$

also gilt in jedem Falle

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leqq M+\pi L.$$

b) Die Funktion $\bar{R}(\vartheta) = 1 : R(\vartheta)$ genügt analogen Bedingungen, wie $R(\vartheta)$ selbst, undzwar ist

$$\frac{1}{M} \leqq \bar{R}(\vartheta) \leqq \frac{1}{m}$$

und

$$\left| \frac{\bar{R}(\vartheta_2) - \bar{R}(\vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right| = \frac{1}{R(\vartheta_1) R(\vartheta_2)} \left| \frac{R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right| \leqq \frac{L}{m^2}.$$

Also, wenn man

$$f^{-1}(z) = \bar{R}(\vartheta) \cdot r e^{i\vartheta} \qquad (z = r e^{i\vartheta})$$

setzt, dann folgt aus dem unter *a*) bewiesenen, daß

$$\left| \frac{f^{-1}(z_2) - f^{-1}(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \leqq \frac{1}{m} + \frac{\pi L}{m^2}$$

ist. Da aber $f^{-1}(z)$ offenbar die inverse Funktion von $f(z)$ ist, folgt hieraus

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \geqq \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{\pi L}{m^2}}.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Nun werden wir zeigen, wie aus unserem Satz 1 der Satz von Sz.-Nagy folgt. Dazu genügt es folgendes zu beweisen:

Satz 2. *Ist $Y = R(X_e) X_e$ die Gleichung der Oberfläche eines konvexen Körpers mit*

$$0 < m \leqq R(X_e) \leqq M,$$

so genügt die Funktion $R(X_e)$ der Bedingung (2) *mit*

$$L = \frac{M}{m} \sqrt{M^2 - m^2}.$$

Im Beweis dürfen wir uns wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den zweidimensionalen Fall beschränken. Wir betrachten also eine konvexe Kurve $z = R(\vartheta) e^{i\vartheta}$ mit $0 < m \leqq R(\vartheta) \leqq M$. Es seinen z_1, z_2 zwei beliebige Punkte auf dieser Kurve; die entsprechenden Winkel ϑ_1, ϑ_2 sollen so normiert werden, daß $|\vartheta_1| \leqq \pi$, $|\vartheta_2| \leqq \pi$.

Es bezeichne δ die Distanz der Punkte z_1 und z_2, d die Distanz des Punktes O von der Geraden g durch z_1 und z_2, ϑ_0 die Richtung des Lotes durch O auf g. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\vartheta_0 = 0$ annehmen; dann ist offenbar $|\vartheta_2 - \vartheta_1| \leqq \pi$. Es ist

$$\delta^2 = R^2(\vartheta_1) + R^2(\vartheta_2) - 2 R(\vartheta_1) R(\vartheta_2) \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

daher

$$(5) \qquad (R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1))^2 = \delta^2 - 4 R(\vartheta_1) R(\vartheta_2) \sin^2 \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}.$$

Es ist weiter

$$\frac{1}{2}\delta\, d = \frac{1}{2} R(\vartheta_1) R(\vartheta_2) \sin|\vartheta_2 - \vartheta_1| = R(\vartheta_1) R(\vartheta_2) \sin\frac{|\vartheta_2 - \vartheta_1|}{2} \cos\frac{|\vartheta_2 - \vartheta_1|}{2};$$

daraus und aus (5) folgt

$$|R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1)|^2 = 4\frac{R^2(\vartheta_1) R^2(\vartheta_2)}{d^2} \cos^2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \sin^2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} - 4R(\vartheta_1) R(\vartheta_2) \sin^2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}.$$

Wir setzen

$$D(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

und erhalten wegen $|\sin x| \leqq |x|$:

$$D^2(\vartheta_1, \vartheta_2) \leqq \left(\frac{R(\vartheta_2) - R(\vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right)^2 = \frac{R^2(\vartheta_1) R^2(\vartheta_2)}{d^2} \cos^2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} - R(\vartheta_1) R(\vartheta_2).$$

Nun gibt es zwei Fälle, je nachdem ϑ_1 und ϑ_2 das gleiche Vorzeichen haben oder nicht. Im ersten Falle ist *wegen der Konvexität* $d \geqq m$. Im zweiten Falle können wir annehmen, daß $0 \leqq |\vartheta_1| \leqq \vartheta_2$. Dann ist wegen $0 \leqq |\vartheta_1| \leqq \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d}{\cos\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}} \geqq \frac{d}{\cos\vartheta_1} = R(\vartheta_1) \geqq m.$$

Es gilt also in jedem Falle

$$D^2(\vartheta_1, \vartheta_2) \leqq M^2\left(\frac{M^2}{m^2} - 1\right),$$

$$D(\vartheta_1, \vartheta_2) \leqq \frac{M}{m}\sqrt{M^2 - m^2},$$

w. z. b. w.

Wir bemerken noch, daß die gefundene Schranke die möglichst beste ist. Sie wird bei einer paßend gewählter Kurve (Rechteck mit den Seiten $2m$ und $m + \sqrt{M^2 - m^2}$) erreicht.

(Eingegangen am 20. Mai 1951.)