Du prolongement des représentations locales des groupes topologiques.

Par TUDOR GANEA à Bucarest.

1. Le théorème, déjà classique, de O. SCHREIER, concernant la structure globale des groupes topologiques localement isomorphes, peut être déduit facilement de la proposition suivante:

Soit φ une représentation locale, dans un groupe abstrait H, d'un voisinage connexe de l'élément neutre d'un groupe topologique connexe, localement connexe et simplement connexe G. Il existe alors une représentation unique du groupe G dans H, qui prolonge φ [3, p. 49, Th. 3]*).

L'objet de cette note est de mettre en évidence qu'aucune des conditions imposées au groupe G, dans l'énoncé ci-dessus, n'est nécessaire afin d'assurer l'existence d'un prolongement à toute représentation locale, définie dans G. Les quelques théorèmes et exemples qui suivent, sont destinés à dégager certaines circonstances plus générales dans lesquelles de tels prolongements sont possibles.

Les résultats principaux de ce travail sont exprimés par les théorèmes (3. 1) et (4. 3). Le premier fournit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement de toute représentation locale d'un groupe topologique G; d'après le second, un tel prolongement est possible ou non simultanément pour G et pour son groupe complété $\hat{G}$. Grâce à ces théorèmes, les exemples considérés mettent finalement en évidence que chacune des conditions: connexion, connexion locale, connexion simple, est plus restrictive que la condition correspondante formulée dans cette note.

2. La terminologie utilisée est empruntée à [2]. Sauf mention contraire, les groupes topologiques dont il s'agit ne sont pas supposés séparés, et leurs sous-groupes ne sont pas supposés fermés.

2. 1. Définition. *Une représentation locale du groupe topologique G est un triplet (V, φ, H), où V désigne un voisinage de l'élément neutre*

*) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

dans G, H un groupe abstrait et φ une application de V dans H, telle que $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ pour tout couple de points $x, y \in V$ avec $xy \in V$; [3, p. 48, Def. 2].

Une représentation Φ du groupe topologique G dans le groupe abstrait H prolonge la représentation locale (V, φ, H), s'il existe un voisinage $W \subset V$ de l'élément neutre dans G, tel que $\Phi(x)=\varphi(x)$, pour tout point $x \in W$.

S'il existe, un tel prolongement est nécessairement unique lorsque le groupe G est engendré par chacun des voisinages de son élément neutre.

2.2. Lemme. *Soit H un sous-groupe partout dense du groupe topologique G. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H est engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans H;*

(ii) *G est engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G.*

En effet, (i) entraîne (ii) selon [2, p 12, Prop. 8].

Réciproquement, V désignant une partie ouverte dans G, soit $V \cap H$ un sous-groupe ouvert dans H. Il en résulte[1]):

$$e \in V = V \cap G = V \cap \overline{H} \subset \overline{V \cap H},$$

donc $\overline{V \cap H}$ est un sous-groupe ouvert dans G et (ii) entraîne $\overline{V \cap H} = G$. Le sous-groupe $V \cap H$ est aussi fermé dans H [2, p. 10, Prop. 4], donc[1]):

$$V \cap H = \overline{V \cap H} \cap H = G \cap H = H.$$

2.3. Définition. *Le groupe topologique G est localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre e, s'il existe un système fondamental $\mathfrak{F}$ de voisinages de e dans G, tel que*

Pour tout voisinage N de e dans G et pour tout $W \in \mathfrak{F}$, tout point $x \in W$ peut être joint à e par une N_d-chaîne[2]) dont tous les points sont dans W.

Cette dénomination est justifiée par la

2.4. Proposition. *Soit W un voisinage de e dans G, dont tout point se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W. Pour tout $x \in W$ il existe alors une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que*[3]):

$$x = \prod_{k=1}^{n} x_k, \quad x_i \in N \quad \text{et} \quad \prod_{k=i}^{n} x_k \in W \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

En effet, $(y_j)_{1 \leq j \leq m}$ désignant une N_d-chaîne à points dans W, joignant x à e, la suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'obtient en posant $n = m-1$ et $x_i = y_{m-i+1} y_{m-i}^{-1}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

---

[1]) Les barres désignent les adhérences par rapport à G.

[2]) Une N_d-chaîne joignant x à e est une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $x_1 = e$, $x_n = x$ et $x_{i+1} x_i^{-1} \in N$ pour $i = 1, \ldots, n-1$; cf. [1, p. 112, Déf. 3 & 2, p. 24, Déf. 1]. En utilisant des N_s-chaînes satisfaisant à la condition $x_i^{-1} x_{i+1} \in N$, on obtient une définition équivalente à (2.3).

[3]) $\prod_{v=p}^{q} a_v = a_p \ldots a_q$ pour $p < q$, et $\prod_{v=p}^{p} a_v = a_p$.

2.5. Lemme. *Soit H un sous-groupe partout dense du groupe topologique G. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H est localement engendré par tout voisinage de e dans H;*

(ii) *G est localement engendré par tout voisinage de e dans G.*

Démonstration. Soit V un voisinage arbitraire de e dans G, donc $V\cap H$ un voisinage arbitraire de e dans H.

D'après (i), il existe un voisinage $W\subset V$ de e dans G, tel que tout point de $W\cap H$ se laisse joindre à e par une $(N\cap H)_d$-chaîne à points dans $W\cap H$, quel que soit le voisinage N de e dans G. Soit N un voisinage quelconque de e dans G et $x\in W$; il existe $y\in N^{-1}x\cap W\cap H$, donc aussi une $(N\cap H)_d$-chaîne $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ à points dans $W\cap H$, joignant y à e. En posant $x_{n+1}=x$, la suite $(x_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est alors une N_d-chaîne à points dans W, joignant x à e.

Réciproquement, d'après (ii), il existe un voisinage $W\subset V$ de e dans G, dont tout point se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W, quel que soit le voisinage N de e dans G. Soit M un voisinage quelconque de e dans G et $x\in W\cap H$; soit N un voisinage de e dans G tel que $N^2N^{-1}\subset M$. Il existe alors une N_d-chaîne $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ à points dans W, joignant x à e. Soit $x_1=e=y_1$, $x_n=x=y_n$ et $x_i\in Ny_i\cap W\cap H$ pour $i=2,\dots,n-1$. Pour $i=1,\dots,n-1$, il en résulte:

$$x_{i+1}x_i^{-1}\in H \quad \text{et} \quad x_{i+1}x_i^{-1}=x_{i+1}y_{i+1}^{-1}\cdot y_{i+1}y_i^{-1}\cdot y_ix_i^{-1}\in N^2N^{-1}\subset M,$$

donc la suite $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une $(M\cap H)_d$-chaîne à points dans $W\cap H$, joignant x à e.

2.6. Corollaire *Tout sous-groupe partout dense H d'un groupe topologique connexe et localement connexe G, est engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H.*

En effet, G est alors engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G [2, p. 11, Prop. 5]. De plus, tout point d'un voisinage connexe W de l'élément neutre dans G, se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W, quel que soit le voisinage N de e dans G [1, p. 112, Prop. 3]. G est donc aussi localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G et (2.6) résulte de (2.2) et (2.5).

2.7. Définition. *Un groupe de recouvrement du groupe topologique G est une paire $(\mathfrak{G},f)$, où $\mathfrak{G}$ désigne un groupe topologique engendré et localement engendré par tout voisinage de son élément neutre et f est un homomorphisme*[4]) *de $\mathfrak{G}$ sur G à noyau*[5]) *discret.*

Le groupe de recouvrement $(\mathfrak{G},f)$ du groupe topologique G est dégénéré si le noyau de l'homomorphisme f est réduit à l'élément neutre du groupe $\mathfrak{G}$.

---

[4]) Un homomorphisme de groupes topologiques est toujours une application ouverte et continue [2, p. 16, Th. 3].

[5]) Le noyau de l'homomorphisme $f:\mathfrak{G}\to G$ est le sous-groupe distingué $f^{-1}(e)$ de $\mathfrak{G}$, e désignant l'élément neutre de G.

2.8. Si le groupe topologique G admet un groupe de recouvrement, G est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G, et réciproquement si G est engendré et localement engendré par tout voisinage de son élément neutre, G admet au moins un groupe de recouvrement dégénéré.

2.9. Soit f un homomorphisme à noyau discret, du groupe topologique $\mathfrak{G}$ sur le groupe topologique G. Si l'un quelconque des deux groupes G, $\mathfrak{G}$ est séparé, localement engendré par chacun des voisinages de son élément neutre, ou localement connexe, le second jouit de la même propriété[6]). En particulier, si $\mathfrak{G}$ est engendré et G localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre respectif, $(\mathfrak{G}, f)$ est un groupe de recouvrement de G; si de plus l'un des groupes G, $\mathfrak{G}$ est localement connexe, les deux sont nécessairement connexes et $(\mathfrak{G}, f)$ devient un groupe de recouvrement au sens classique [3, p. 59, Cor. 2 & 3, p. 53, Def. 2].

3. Le lien entre l'existence d'un prolongement à toute représentation locale du groupe G et la famille de ses groupes de recouvrement est fourni par le suivant

3.1. Théorème. *Soit G un groupe topologique engendré et localement engendré par chacun des voisinages de son élément neutre. Pour que toute représentation locale de G puisse être prolongée en une représentation du groupe G entier, il faut et il suffit que tout groupe de recouvrement de G soit dégénéré.*

Démonstration. Soit $(\mathfrak{G}, f)$ un groupe de recouvrement de G. Le noyau de f étant discret, il existe un voisinage symétrique U de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que f soit univalent sur U^2. $V = f(U)$ est un voisinage de l'élément neutre dans G et, en posant

$$\varphi(x) = U \cap f^{-1}(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in V,$$

$(V, \varphi, \mathfrak{G})$ est une représentation locale de G, qui admet par hypothèse un prolongement $\Phi : G \to \mathfrak{G}$. La représentation $f \circ \Phi$ coïncide sur un voisinage $W \subset V$ de e dans G, donc sur tout le groupe G avec l'application identique de G sur soi. Le groupe $\mathfrak{G}$ étant engendré par tout voisinage de son élément neutre, de

$$\Phi(W) = \varphi(W) = U \cap f^{-1}(W)$$

résulte $\Phi(G) = \mathfrak{G}$ et l'univalence de f sur $\mathfrak{G}$ en découle.

Réciproquement, soit (V, φ, H) une représentation locale de G dans le groupe abstrait H. Soit $W \subset V$ un voisinage de l'élément neutre e dans G, dont tout point se laisse joindre à e par une N_d-chaîne à points dans W,

---

[6]) Pour la séparation, voir [2, p. 13, Th. 2 & 2, p. 10, Prop. 3 (Rectif. Fasc. III)]; pour les deux autres propriétés, l'énoncé résulte de ce que les groupes $\mathfrak{G}$ et G sont localement isomorphes [2, p. 13, Prop. 9].

quel que soit le voisinage N de e dans G; soit enfin R un voisinage ouvert et symétrique de e dans G, contenu dans W. Soit $\mathfrak{G}$ le sous-groupe du groupe produit $G\times H$, engendré par le graphe de la restriction de φ à R; soient aussi f la restriction à $\mathfrak{G}$ de la projection $G\times H\to G$ et ψ la restriction à $\mathfrak{G}$ de la projection $G\times H\to H$. Puisque G est engendré par tout voisinage de son élément neutre et f est une représentation, $f(\mathfrak{G})\supset R$ entraîne $f(\mathfrak{G})=G$. Les graphes des restrictions de φ aux voisinages de e dans G, contenus dans R, vérifient [7]) les axiomes [2, p. 5] d'un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$. Muni de la topologie ainsi définie [2, p. 4, Prop. 1], $\mathfrak{G}$ devient un groupe topologique et f un homomorphisme à noyau discret, de $\mathfrak{G}$ sur G.

De plus, $\mathfrak{G}$ est engendré par tout voisinage de son élément neutre. En désignant, en effet, par N un voisinage quelconque de e dans G, contenu dans R, d'après (2. 4) il existe pour tout $x\in R\subset W$ une suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que:

$$x=\prod_{k=1}^{n}x_k,\quad x_i\in N\subset R\subset W\quad \text{et}\quad \prod_{k=i}^{n}x_k\in W\quad \text{pour } i=1,\dots,n.$$

Par récurrence, et puisque $W\subset V$, il en résulte

$$\varphi(x)=\varphi\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\varphi(x_k),$$

donc tout générateur $(x,\varphi(x))$, avec $x\in R$, de $\mathfrak{G}$ est un produit d'éléments du voisinage de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, constitué par le graphe de la restriction de φ à N. A la suite de (2. 9), puisque de plus G est localement engendré par tout voisinage de son élément neutre, $(\mathfrak{G},f)$ est un groupe de recouvrement de G. Par hypothèse, ce groupe de recouvrement est dégénéré, donc f est univalent sur $\mathfrak{G}$. Pour $x\in R$, $f^{-1}(x)=(x,\varphi(x))$ donc $\Phi=\psi\circ f^{-1}$ est une représentation de G dans H, qui prolonge (V,φ,H).

3. 2. Corollaire. *Soit G un groupe topologique connexe, localement connexe et simplement connexe. Toute représentation locale de G dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe G;* cf. [3, p. 49. Th. 3].

---

[7]) La vérification des trois premiers axiomes de [2, p. 5] est aisée. Pour vérifier le quatrième, soit $P\subset R$ un voisinage quelconque de e dans G, et supposons d'abord $a\in R=R^{-1}$; R étant ouvert dans G, il existe un voisinage Q de e dans G, tel que

$$Q\subset aPa^{-1}\cap Ra^{-1}\cap R;$$

pour $y\in Q$ il en résulte $y=axa^{-1}$ avec $x\in P$ et $ax\in R$, donc

$$\varphi(y)=\varphi(axa^{-1})=\varphi(ax)\,\varphi(a^{-1})=\varphi(a)\,\varphi(x)\,(\varphi(a))^{-1},$$

donc pour tout $y\in Q$ il existe $x\in P$ tel que

$$(y,\varphi(y))=(axa^{-1},\varphi(a)\,\varphi(x)\,(\varphi(a))^{-1})=(a,\varphi(a))\,(x,\varphi(x))\,(a,\varphi(a))^{-1}.$$

Le cas $a\in G$, donc $a=a_1\dots a_n$ avec $a_i\in R$, résulte par application répétée du cas $a\in R$

En effet, tout groupe de recouvrement de G, étant d'après (2.9) un espace de recouvrement de G, est dégénéré dû à la connexion simple de G [3, p. 44, Def. 1], et (3.2) résulte de (3.1).

3.3. Remarque. L'idée de démonstration employée dans (3.1) est empruntée à [6, p. 81, Th. 18]. Elle conduit à une démonstration de (3.2) différente de celle de [3, p. 49, Th. 2], ne faisant pas usage du principe de monodromie [3, p. 46, Th. 2].

4. Une des conséquences du théorème (3.1) est que l'existence d'un prolongement de toute représentation locale du groupe topologique G a lieu en même temps que l'existence d'un prolongement de toute représentation locale du groupe complété $\hat{G}$ de G.

4.1. Lemme. *Soient $\mathfrak{G}$ et G deux groupes topologiques séparés, et f un homomorphisme à noyau discret, de $\mathfrak{G}$ sur G. Si le groupe topologique G admet un groupe complété, il en est de même pour le groupe topologique $\mathfrak{G}$. En désignant alors par $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ les groupes complétés respectifs, il existe un homomorphisme $\hat{f}$, à noyau discret, de $\hat{\mathfrak{G}}$ sur $\hat{G}$, qui prolonge[8]) f.*

Démonstration. Soit d'abord $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy [1, p. 99, Def. 3] pour la structure uniforme droite $\mathfrak{G}_d$ du groupe $\mathfrak{G}$, [2, p. 24, Def. 1], et U un voisinage symétrique de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que f soit univalent sur U^2. Il existe $A\in\mathfrak{F}$ tel que $AA^{-1}\subset U$, donc $A\subset Ua$ avec $a\in A\subset\mathfrak{G}$. Soit V un voisinage de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que

$$V\subset a^{-1}U^2a\cap U.$$

$f(V)$ est alors un voisinage de l'élément neutre dans G. Puisque $f(\mathfrak{F})$ est une base de filtre de Cauchy sur G_d [2, p. 25, Prop. 3 & 1, p. 100, Prop. 5], et puisque G admet par hypothèse un groupe complété, d'après [2, p. 30, Th. 1] il existe $B\in\mathfrak{F}$ tel que

$$f(B^{-1}B)=(f(B))^{-1}f(B)\subset f(V).$$

En posant $C=A\cap B\in\mathfrak{F}$ [1, p. 20, Def. 1] et en désignant par π le noyau de homomorphisme f, il résulte

$$C^{-1}C\subset B^{-1}B\subset V\pi \quad \text{et} \quad C^{-1}C\subset A^{-1}A\subset a^{-1}U^2a.$$

L'univalence de f sur $a^{-1}U^2a$ et $V\subset a^{-1}U^2a$ entraînent

$$V\pi\cap a^{-1}U^2a\subset V \quad \text{donc} \quad C^{-1}C\subset V\subset U.$$

Il est ainsi prouvé que l'image de $\mathfrak{F}$ par la symétrie $x\to x^{-1}$ de $\mathfrak{G}$ sur soi, est encore un filtre de Cauchy sur $\mathfrak{G}_d$, donc $\mathfrak{G}$ admet, d'après [2, p. 30, Th. 1], un groupe complété.

Soient à présent $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ les groupes complétés de $\mathfrak{G}$ et G respectivement. Il existe une représentation continue $\hat{f}$ de $\hat{\mathfrak{G}}$ dans $\hat{G}$, qui prolonge[8]) f; cf.

---

[8]) En identifiant $\mathfrak{G}$ et G à des sous-groupes partout denses de $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ respectivement; cf. [2, p. 27].

[2, p. 29, Rem.]. Soit U un voisinage symétrique de l'élément neutre dans $\mathfrak{G}$, tel que f soit univalent sur U^2; $V=f(U)$ est alors un voisinage de l'élément neutre dans G. Puisque U et V sont partout denses dans[9]) $\overline{U}$ et $\overline{V}$, qui sont complets [1, p. 101, Prop. 6], et puisque la restriction de f à U est un isomorphisme de l'espace uniforme[10]) U sur l'espace uniforme[10]) V, il existe [1, p. 105, Prop. 8] un isomorphisme F de l'espace uniforme[11]) $\overline{U}$ sur l'espace uniforme[11]) $\overline{V}$, qui prolonge la restriction de f à U. L'unicité des prolongements continus [1, p. 38, Th. 1] entraîne

$$(*)\qquad \hat{f}(x)=F(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in\overline{U}\subset\hat{\mathfrak{G}}.$$

Puisque $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont des voisinages de l'élément neutre dans $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$ respectivement [2, p. 30, Prop. 7], à la suite de (*) la restriction de $\hat{f}$ à $\overline{U}$ est le prolongement d'un isomorphisme local de $\hat{\mathfrak{G}}$ à $\hat{G}$, [2, p. 8, Prop. 3]. Il en résulte que $\hat{f}$ est un homomorphisme à noyau discret de $\hat{\mathfrak{G}}$ dans $\hat{G}$. Puisque $\hat{f}(\hat{\mathfrak{G}})$ est un sous-groupe ouvert, donc aussi fermé [2, p. 10, Prop. 4] dans $\hat{G}$, contenant le sous-groupe partout dense G de $\hat{G}$, il résulte finalement

$$\hat{f}(\hat{\mathfrak{G}})=\hat{G}.$$

4.2. Proposition. *Soit H un sous-groupe partout dense du groupe topologique G. Si H est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans H, et si toute représentation locale de H dans un groupe abstrait admet un prolongement sur H, le groupe G jouit des mêmes propriétés.*

En effet, selon (2.2) et (2.5), G est aussi engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G. Soit $(\mathfrak{G}, g)$ un groupe de recouvrement de G; soit $\mathfrak{H}=g^{-1}(H)$ et h la restriction de g à $\mathfrak{H}$. Le groupe $\mathfrak{H}$ est partout dense dans $\mathfrak{G}$, donc d'après (2.2) et (2.5), il est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans $\mathfrak{H}$. De plus h est un homomorphisme à noyau discret de $\mathfrak{H}$ sur H, donc $(\mathfrak{H}, h)$ est un groupe de recouvrement de H. A la suite de (3.1), le noyau de h est reduit à l'élément neutre de $\mathfrak{H}$; puisque le noyau de g coïncide avec celui de h, le groupe de recouvrement $(\mathfrak{G}, g)$ est dégénéré et (4.2) résulte de (3.1).

4.3. Théorème. *Soit G un groupe topologique séparé, admettant un groupe complété $\hat{G}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

---

9) Les barres désignent les adhérences par rapport aux groupes complétés $\hat{\mathfrak{G}}$ ou $\hat{G}$, selon le cas.

10) Il s'agit de la structure uniforme induite par la structure uniforme droite $\mathfrak{G}_d$, respectivement G_d, des groupes $\mathfrak{G}$ et G.

11) Il s'agit de la structure uniforme induite par la structure uniforme droite $\hat{\mathfrak{G}}_d$, respectivement $\hat{G}_d$, des groupes $\hat{\mathfrak{G}}$ et $\hat{G}$.

(i) *G est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans G, et toute représentation locale de G dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe G;*

(ii) *$\hat{G}$ est engendré et localement engendré par tout voisinage de l'élément neutre dans $\hat{G}$, et toute représentation locale de $\hat{G}$ dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe $\hat{G}$.*

Démonstration. Puisque G est un sous-groupe partout dense dans[8] $\hat{G}$, (i) entraîne (ii) selon (4. 2).

Réciproquement, à la suite de (2. 2), (2. 5) et (ii), G est engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans G. Soit $(\mathfrak{G}, f)$ un groupe de recouvrement de G. D'après (4. 1), le groupe topologique $\mathfrak{G}$ admet un groupe complété $\hat{\mathfrak{G}}$, et il existe un homomorphisme $\hat{f}$ à noyau discret, de $\hat{\mathfrak{G}}$ sur $\hat{G}$, qui prolonge f. Puisque $\mathfrak{G}$ est partout dense dans $\hat{\mathfrak{G}}$, à la suite de (2. 2) et (2. 5), $\hat{\mathfrak{G}}$ est aussi engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans $\hat{\mathfrak{G}}$: $(\hat{\mathfrak{G}}, \hat{f})$ est donc un groupe de recouvrement de $\hat{G}$. D'après (3. 1) et (ii), ce groupe de recouvrement est dégénéré, et puisque le noyau de l'homomorphisme f est contenu dans celui de $\hat{f}$, le groupe de recouvrement $(\mathfrak{G}, f)$ de G est aussi dégénéré. (i) est à présent une conséquence de (3. 1).

4. 4. Corollaire. *Soit G un groupe topologique séparé et complet. Soient H et K deux sous-groupes de G, ayant même adhérence dans G. Si H est engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H, et si toute représentation locale de H dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe H, le groupe K jouit des mêmes propriétés.*

4. 5. Corollaire. *Soit H un sous-groupe partout dense d'un groupe séparé, connexe, localement connexe, simplement connexe et complet, donc en particulier localement compact* [2, p. 27, Prop. 4]. *H est alors engendré et localement engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre dans H, et toute représentation locale de H dans un groupe abstrait admet un prolongement sur le groupe H entier.*

5. Les résultats précédents permettent à présent de prouver qu'aucune des conditions: connexion, connexion locale et (surtout) connexion simple, n'est nécessaire afin d'assurer l'existence d'un prolongement à toute représentation locale d'un groupe topologique.

5. 1. Proposition. *Il existe trois groupes topologiques séparés G_1, G_2, G_3, chacun engendré et localement engendré par tout voisinage de son élément neutre, et tels que:*

(i) *Toute représentation locale de G_j dans un groupe abstrait admet un prolongement sur tout le groupe G_j, pour $j = 1, 2, 3$;*

(ii) G_1 *est totalement discontinu,* G_2 *est connexe sans être localement connexe,* G_3 *est connexe et localement connexe sans être simplement connexe* (*au sens de* [3, p. 44, Def. 1]).

Démonstration. Soit G_1 le groupe des nombres rationnels, muni de la topologie de sous-groupe partout dense du groupe topologique additif des nombres réels R^1. Puisque R^1 est simplement connexe et localement compact, G_1 jouit des propriétés énoncées en vertu de (4. 5).

Il existe une solution discontinue de l'équation fonctionnelle réelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$, à graphe connexe [5, p. 118, Th. 5]. Soit G_2 le graphe d'une telle solution. G_2 est un sous-groupe connexe, partout dense du groupe topologique additif plan R^2 [5, p. 116, Th. 1], et n'est pas localement connexe [5, p. 119, Prop. 3]. Puisque R^2 est simplement connexe et localement compact, G_2 jouit des propriétés énoncées en vertu de (4. 5).

Soit G_3 la somme directe de G_2 et du sous-groupe de R^2 constitué par les points d'abscisse nulle et ordonnée rationnelle. Muni de la topologie induite par celle de R^2, G_3 est un groupe connexe et localement connexe [5, p. 119, Prop. 7]. Puisqu'il est partout dense dans R^2, qui est simplement connexe et localement compact, à la suite de (4. 5) il ne reste plus qu'à prouver que G_3 n'est pas simplement connexe. A cet effet, soient P et N les parties de G_3 se projetant sur le demi-axe réel positif fermé et sur le demi-axe réel négatif fermé, respectivement. P et N sont fermés dans G_3 et connexes; de plus $G_3=P\cup N$ et $P\cap N$ est l'ensemble des points de R^2 à abscisse nulle et ordonnée rationnelle, donc $P\cap N$ n'est pas connexe. Il est ainsi prouvé que G_3 n'est pas unicohérent[12]), et puisque G_3 est un espace métrique, (5. 1) résulte finalement du

5. 2. Lemme. *Un espace métrique, connexe, localement connexe et simplement connexe* (*selon* [3, p. 44, Def. 1]) E *est unicohérent*[12]).

En effet, en désignant par θ l'application de R^1 sur la circonférence T^1, définie par $\theta(t)=e^{it}$ pour tout $t\in R^1$ $(i=\sqrt{-1})$, (R^1,θ) est un espace de recouvrement de T^1 [3, p. 58, Prop. 3]. Etant donnée à présent une application continue quelconque f de E dans T^1, en vertu de la connexion simple de E et de [3, p. 50, Prop. 1], il existe une application continue φ de E dans R^1, telle que $f(x)=\theta\circ\varphi(x)=e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x\in E$. L'unicohérence de E résulte finalement de [4, p. 70, Th. 3].

6. S'il existe, l'espace de recouvrement simplement connexe d'un groupe topologique séparé, connexe et localement connexe G, admet une structure de groupe topologique, muni de laquelle il devient un groupe de recouvrement de G [3, p. 53, Prop. 5]. Tout autre espace de recouvrement de G est aussi,

[12]) Un espace connexe E est unicohérent si, quelles que soient ses parties connexes et fermées A et B, $E=A\cup B$ entraîne la connexion de $A\cap B$ [4, p. 69].

dans ce cas, un groupe de recouvrement de G, isomorphe à un groupe quotient du groupe de recouvrement simplement connexe de G.

Le groupe topologique G_3, considéré ci-dessus, fournit un exemple d'un groupe connexe et localement connexe, n'étant point simplement connexe, n'admettant point d'espace de recouvrement simplement connexe, et dont nul espace de recouvrement non-dégénéré ne peut être muni, en vertu de (5. 1) et (3. 1), d'une structure de groupe de recouvrement de G_3.

Ces propriétés du groupe G_3 mettent de plus en évidence que la dégénérescence de tout groupe de recouvrement d'un groupe connexe et localement connexe, n'entraîne pas, en général, la connexion simple de ce groupe.

Bibliographie.

1. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre III, *Topologie Générale*, chap. I & II (Paris, 1940).
2. —— *Eléments de Mathématique*, Livre III, *Topologie Générale*, chap. III & IV (Paris, 1942).
3. C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, I (Princeton, 1946).
4. S. Eilenberg, Transformations continues en circonférence et la topologie du plan, *Fundamenta Math.*, **26** (1936), p. 61—112.
5. F. B. Jones, Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x)+f(y)=f(x+y)$, *Bulletin American Math. Soc.*, **48** (1942), p. 115—120.
6. L. Pontrjagin, *Topological Groups* (Princeton, 1946).

(Reçu le 30 juin 1951)