Perturbations des transformations linéaires fermées.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

La plupart des recherches sur les perturbations des transformations linéaires concerne les transformations autoadjointes de l'espace de Hilbert, ce qui est bien naturel vu l'importance de leurs applications à la Physique. Il n'est peut-être pourtant pas sans intérêt d'examiner en quelle mesure les raisonnements qu'on a employés dans ces recherches s'adaptent au cas des transformations linéaires de types plus généraux, de l'espace de Hilbert, ou même d'un espace de Banach.

Dans cette Note, il s'agira des transformations linéaires *fermées* quelconques. On étudiera d'abord la question de l'invariance de cette propriété lors de perturbations, puis on envisagera le problème ordinaire de la théorie des perturbations: le comportement du spectre. La méthode des transformations résolvantes, dont l'auteur s'est servi dans l'étude des perturbations des transformations autoadjointes[1]), peut être appliquée et l'on obtient, notamment pour la perturbation d'une partie isolée du spectre et en particulier pour celle d'un point isolé du spectre de multiplicité "principale" 1, des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas des transformations autoadjointes.

1. Invariance de la fermeture.

Soit T une transformation linéaire d'un espace de Banach $\mathfrak{B}$ en un espace de Banach $\mathfrak{B}'$, ayant pour domaine de définition l'ensemble linéaire $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. On l'appelle *fermée*, si les hypothèses

$$f_n \in \mathfrak{D}, \qquad f_n \to f, \qquad Tf_n \to g$$

entraînent que

$$f \in \mathfrak{D}, \qquad Tf = g.$$

[1]) BÉLA SZ.-NAGY, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Commentarii Math. Helvetici*, **19** (1947), p. 347—366; une première rédaction de ce Mémoire, en langue hongroise, a été publiée dans *Matematikai és Természettudományi Értesitő*, **61** (1942).

Toute transformation linéaire T qui est continue et pour laquelle $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}$, est fermée. Inversement, d'après un théorème de Banach[2]), toute transformation linéaire fermée T, pour laquelle $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}$, est aussi continue. D'autre part, toutes les transformations linéaires continues sont bornées, et inversement.

Les transformations autoadjointes non bornées de l'espace de Hilbert fournissent des exemples des transformations linéaires fermées non bornées. Mais il y a des transformations linéaires qui ne sont pas fermées, et même qui ne peuvent être prolongées de sorte qu'elles deviennent fermées. Pour que la transformation linéaire T admette un prolongement fermé, il faut et il suffit que les hypothèses

(1) $$f_n \in \mathfrak{D}, \qquad f_n \to 0, \qquad Tf_n \to g$$

entraînent que

(2) $$g=0.$$

Lorsque'on fait varier une transformation linéaire fermée "relativement" peu, elle reste fermée: c'est ce qui est affirmé par le

Théorème 1. *Soient T_0 et T deux transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant le même domaine de définition $\mathfrak{D}\subseteqq\mathfrak{B}$; de plus soit T_0 fermée. Pour que T soit aussi fermée, il suffit de supposer qu'il existe des constantes θ_1 et θ_2 dont $\theta_2<1$, telles qu'on ait*

(3) $$\|(T-T_0)f\| \leqq \theta_1\|f\|+\theta_2\|T_0f\|$$

pour tout $f\in\mathfrak{D}$.

Démonstration. Il résulte de l'inégalité (3) que

(4) $$\|Tf\| \leqq \|T_0f\|+\|(T-T_0)f\| \leqq \theta_1\|f\|+(1+\theta_2)\|T_0f\|,$$

et que

$$\|Tf\| \geqq \|T_0f\|-\|(T-T_0)f\| \geqq -\theta_1\|f\|+(1-\theta_2)\|T_0f\|,$$

d'où

(5) $$\|T_0f\| \leqq (1-\theta_2)^{-1}[\|Tf\|+\theta_1\|f\|].$$

Afin de démontrer que T est fermée, envisageons une suite quelconque d'éléments $f_n\in\mathfrak{D}$ telle que $f_n\to f$ et $Tf_n\to g$. En vertu de (5), on aura

$$\|T_0(f_n-f_m)\| \leqq (1-\theta_2)^{-1}[\|T(f_n-f_m)\|+\theta_1\|f_n-f_m\|]\to 0$$

pour $m,n\to\infty$, ce qui entraîne que la suite $\{T_0f_n\}$ est aussi convergente. Or T_0 était supposée formée, et par conséquent on a

$$f\in\mathfrak{D}, \qquad T_0f_n\to T_0f.$$

En appliquant l'inégalité (4) il résulte que

$$\|T(f_n-f)\| \leqq \theta_1\|f_n-f\|+(1+\theta_2)\|T_0(f_n-f)\|\to 0$$

[2]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932); p. 41.

pour $n \to \infty$, donc $Tf_m \to Tf$, c'est-à-dire que

$$g = Tf,$$

ce qui achève la démonstration.

Tandis que l'inégalité (3) présentait une condition suffisante pour que T soit fermée, l'inégalité (4) dérivée de (3) est une condition nécessaire pour que T soit aussi fermée, où même pour que T admette un prolongement fermé. C'est ce qui est exprimé par le

Théorème 2. *Soient T_0 et T deux transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant le même domaine de définition $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{B}$; supposons de plus que T_0 est fermée et que T admet un prolongement fermé. Il y a alors des constantes $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ telles qne*

$$\|Tf\| \leqq \alpha \|f\| + \beta \|T_0 f\|$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. Introduisons dans $\mathfrak{D}$ la nouvelle norme

$$|f| = \|f\| + \|T_0\|; \tag{6}$$

avec cette définition de la norme, $\mathfrak{D}$ devient un espace linéaire normé *complet*, donc un espace de Banach, que nous désignerons par $\boldsymbol{D}$. (Le fait que $\boldsymbol{D}$ est complet, découle immédiatement du fait que T_0 est fermée.)

Montrons que T, considérée comme une transformation linéaire de l'espace $\boldsymbol{D}$ en l'espace $\mathfrak{B}'$, est fermée. Comme T est partout définie dans $\boldsymbol{D}$, il suffit de montrer que T admet, dans $\boldsymbol{D}$, un prolongement linéaire fermé, c'est-à-dire que, en désignant la convergence dans $\boldsymbol{D}$ par $\twoheadrightarrow$, les hypothèses

$$f_n \in \boldsymbol{D}, \qquad f_n \twoheadrightarrow 0, \qquad Tf_n \to g$$

entraînent que

$$g = 0.$$

Or $f_n \twoheadrightarrow 0$ entraîne que $f_n \to 0$, et comme on a supposé que T admet un prolongement fermé dans $\mathfrak{B}$, on a nécessairement $g = 0$.

Donc, dans $\boldsymbol{D}$, T est fermée, et comme elle est partout définie dans $\boldsymbol{D}$, elle est aussi bornée dans $\boldsymbol{D}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que

$$\|Tf\| \leqq M |f|$$

pour tout $f \in \boldsymbol{D}$, ou, ce qui revient au même,

$$\|Tf\| \leqq M(\|f\| + \|T_0 f\|)$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}$, ce qu'il fallait démontrer.

Les théorèmes suivants 3 et 4 concernent des perturbations analytiques et sont les analogues des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3. *Soient $T_0, T_1, T_2, \ldots$ des transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant toutes le même domaine $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{B}$; de plus soit T_0 fermée. Supposons* *encore qu'il existe des constantes $a, b, p \geqq 0$ telles que*

(7) $$\|T_k f\| \leqq p^{k-1}(a\|f\| + b\,|T_0 f|) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$ [3]).

Dans ces conditions, la série

$$T_0 f + \varepsilon T_1 f + \varepsilon^2 T_2 f + \cdots + \varepsilon^k T_k f + \cdots$$

converge pour tout $f \in \mathfrak{D}$ et pour $|\varepsilon| < p^{-1}$; en désignant sa somme par $T(\varepsilon) f$, on a défini une transformation linéaire $T(\varepsilon)$ de domaine $\mathfrak{D}$. Pour

$$|\varepsilon| < (p + b)^{-1}$$

cette transformation $T(\varepsilon)$ est fermée.

Démonstration. L'existence de $T(\varepsilon)$ pour $|\varepsilon| < p^{-1}$ et sa linéarité sont manifestes. On a, pour $|\varepsilon| < p^{-1}$ et pour $f \in \mathfrak{D}$,

$$\|(T(\varepsilon) - T_0) f\| \leqq \sum_1^\infty |\varepsilon|^k \|T_k f\| \leqq \sum_1^\infty |\varepsilon|^k p^{k-1}(a\|f\| + b\|T_0 f\|) = \theta_1 \|f\| + \theta_2 \|T_0 f\|$$

où

$$\theta_1 = \frac{|\varepsilon| a}{1 - |\varepsilon| p}, \quad \theta_2 = \frac{|\varepsilon| b}{1 - |\varepsilon| p}.$$

Lorsque $|\varepsilon| < (p + b)^{-1}$, on a $\theta_2 < 1$; en appliquant le théorème 1, on conclut à ce que $T(\varepsilon)$ est fermée.

Théorème 4. *Soient $T_0, T_1, T_2, \ldots$ des transformations linéaires de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, ayant le même domaine de définition $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{B}$; soit T_0 fermée. Supposons que la série*

$$T_0 f + \varepsilon T_1 f + \varepsilon^2 T_2 f + \cdots$$

converge pour $|\varepsilon| < \varrho$ et pour tout $f \in \mathfrak{D}$, et qu'elle définisse ainsi une transformation linéaire $T(\varepsilon)$; supposons de plus que $T(\varepsilon)$ est fermée ou du moins qu'elle admet un prolongement fermé.

Il y a alors des constantes $a, b, p \geqq 0$ telles que les inégalités (7) sont vérifiées pour tout $f \in \mathfrak{D}$.

Démonstration. Faisons de $\mathfrak{D}$ un espace complet $\boldsymbol{D}$ en introduisant la norme (6). En vertu du théorème 2, $T(\varepsilon)$ est bornée dans $\boldsymbol{D}$; montrons qu'il en est de même de ses coefficients T_k. Cela est vrai pour $T_0 = T(0)$; supposons qu'on l'ait déjà démontré pour tous les $k < n$. Alors, pour tout ε tel que $|\varepsilon| < \varrho$, $\varepsilon \neq 0$, la transformation

$$S_n(\varepsilon) = \varepsilon^{-n}\left[T(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k T_k\right]$$

est aussi bornée dans $\boldsymbol{D}$. En fixant ϱ_1 entre 0 et ϱ, la série

$$\sum_{k=0}^\infty \varrho_1^k T_k f$$

[3]) Lorsque $p = 0$, on pose $p^0 = 1$.

converge pour tout $f \in \mathfrak{D}$, et par conséquent $\varrho_1^k T_k f \to 0$, donc

$$\|\varrho_1^k T_k f\| \leqq M_f \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

M_f étant une constante ne dépendant que de l'élément $f \in \mathfrak{D}$. Il s'ensuit que, pour $|\varepsilon| < \varrho_1$, $\varepsilon \neq 0$ on a

$$\|S_n(\varepsilon) f - T_n f\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^{k-n} T_k f \right\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varepsilon|^{k-n} \varrho_1^{-k} M_f = \frac{|\varepsilon| M_f}{\varrho_1^n (\varrho_1 - |\varepsilon|)};$$

par conséquent

$$S_n(\varepsilon) f \to T_n f,$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Or on sait que la limite d'une suite fortement (ou même faiblement) convergente de transformations linéaires bornées est elle-même bornée, donc T_n est aussi bornée.

Ainsi, on a démontré par récurrence que les T_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, considérées comme transformations de $\boldsymbol{D}$ en $\mathfrak{B}'$, sont bornées donc continues. Il en est alors de même quant aux transformations $\varrho_1^k T_k$. Or celles-ci forment une suite convergeant (fortement) vers 0; par conséquent elles sont uniformément bornées:

$$\|\varrho_1^k T_k f\| \leqq M \,\|f\| \qquad (f \in \boldsymbol{D};\ k = 1, 2, \ldots),$$

la constante M ne dépendant ni de f ni de k. En écrivant ces inégalités sous la forme

$$\|T_k f\| \leqq \varrho_1^{-k} M (\|f\| + \|T_0 f\|) \qquad (f \in \mathfrak{D};\ n = 1, 2, \ldots),$$

on a démontré le théorème avec $a = b = M \varrho_1^{-1}$ et $p = \varrho_1^{-1}$.

2. Rappel de quelques faits concernant le spectre.

Soit T une transformation linéaire fermée de l'espace $\mathfrak{B}$ en lui-même, ayant son domaine $\mathfrak{D}$ partout dense dans $\mathfrak{B}$. Soit $\varrho(T)$ l'ensemble résolvant de T, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs complexes z pour lesquelles la transformation

$$R_z = (T - zI)^{-1}$$

existe, a son domaine dense dans $\mathfrak{B}$, et est bornée; vu que R_z est aussi fermée puisque T et $T - zI$ le sont, son domaine coïncide avec l'espace entier. L'ensemble $\varrho(T)$ est ouvert (et éventuellement vide); son complémentaire $\sigma(T)$, le *spectre* de T, est donc un ensemble fermé.

Supposons que $\sigma(T)$ peut être décomposé en deux parties isolées σ, σ', et cela de sorte qu'on peut tracer une courbe simple fermée rectifiable C, passant dans $\varrho(T)$ et ayant σ dans son intérieur et σ' à son extérieur. L'espace $\mathfrak{B}$ peut alors être décomposé en somme vectorielle de deux sous-espaces disjoints $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, chacun réduisant la transformation T, et tels que les parties de T dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ ont pour leur spectre respectivement les ensembles σ et σ'. Cette décomposition est déterminée d'une manière univoque, et la projection (parallèle) de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{M}$ dans la direction $\mathfrak{M}'$ est fournie par la formule

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_z\,dz$$

où l'on parcourt C dans le sens positif, l'intégrale étant définie comme la limite (au sens de la convergence en norme des transformations) des sommes du type de Cauchy—Riemann. On a donc $P^2 = P$, $\mathfrak{M} = P\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}' = (I-P)\mathfrak{B}$. Appelons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les *sous-espaces spectraux* correspondant respectivement aux parties isolées σ, σ' du spectre. $\mathfrak{M}$ comprend en particulier tous les éléments propres correspondant aux valeurs propres λ intérieures à C, c'est-à-dire les solutions f de l'équation

$$(T-\lambda I)f = 0; \tag{8}$$

d'une manière plus générale, $\mathfrak{M}$ comprend tous les éléments "principaux" f correspondant à λ, c'est-à-dire pour lesquels

$$\lim_{n\to\infty} \|(T-\lambda I)^n f\|^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{9}$$

Les solutions f de (8) forment le *sous-espace propre* correspondant à la valeur propre λ; appelons sa dimension la *multiplicité propre* de λ. Convenons d'appeler le sous-espace déterminé par les solutions f de (9) le *sous-espace principal* correspondant à λ, et sa dimension la *multiplicité principale* de λ; celle-ci étant en général supérieure à la multiplicité propre. Si λ est un point isolé du spectre, le sous-espace spectral correspondant coïncide avec le sous-espace principal correspondant.

Il résulte de la relation évidente

$$TR_z = [T - zI) + zI]R_z = I + zR_z$$

que

$$TP = -\frac{1}{2\pi i}\int_C TR_z\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_C zR_z\,dz \tag{10}$$

(le fait qu'il est légitime de faire entrer T sous le signe d'intégrale découle de l'hypothèse que T est fermée).

Soit $\mathfrak{B}^*$ le dual de l'espace $\mathfrak{B}$, constitué par les fonctionnelles conjuguées-linéaires f^* de $\mathfrak{B}$; désignons par

$$(f^*, f) \text{ ou par } \overline{(f, f^*)}$$

la valeur que la fonctionnelle f^* fait correspondre à l'élément f de $\mathfrak{B}$. Les éléments $f^* \in \mathfrak{B}^*$ auxquels on peut attacher des éléments $g^* \in \mathfrak{B}^*$ de façon qu'on ait

$$(f^*, Tf) = (g^*, f)$$

pour tout $f \in \mathfrak{D}$, forment le domaine de définition de la transformation "adjointe" T^*: on a par définition $T^* f^* = g^*$. Si T est bornée, T^* est partout définie dans $\mathfrak{B}^*$ et a la même borne que T. Pour tout $z \in \varrho(T)$ on a

$$[(T-zI)^{-1}]^* = (T^*-\bar{z}I)^{-1},$$

$\bar{z}$ désignant la valeur complexe conjuguée à z. Il en resulte que si la courbe C passe dans $\varrho(T)$, son image symétrique par rapport à l'axe réel, $\bar{C}$, passe dans $\varrho(T^*)$ et qu'on a

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{C}}(T^*-\zeta I)^{-1}d\zeta = \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}(T-zI)^{-1}dz\right]^* = P^*;$$

P^* est donc égale à la projection qui correspond à la transformation T^* et à la partie de son spectre qui est à l'intérieur de $\bar{C}$. Si $P \neq O$, on a aussi $P^* \neq O$, donc si le spectre de T n'est pas vide dans l'intérieur de C, le spectre de T^* n'est pas vide non plus dans l'intérieur de $\bar{C}$.

En particulier, si λ est un point isolé de $\sigma(T)$, $\bar{\lambda}$ sera un point isolé de $\sigma(T^*)$. De plus, si λ est de multiplicité principale finie n, il en est de même quant à $\bar{\lambda}$. En effet, en désignant par P la projection sur le sous-espace spectral $\mathfrak{M}$ correspondant à λ (qui est, dans ce cas, le même que le sous-espace principal correspondant à λ), on a

$$Pf = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est une base de $\mathfrak{M}$ et où les coefficients c_k sont des fonctionnelles linéaires en l'élément variable f: donc il existe des éléments $\varphi_k^* \in \mathfrak{B}^*$ tels que

$$\bar{c}_k = (\varphi_k^*, f);$$

ces éléments sont évidemment aussi linéairement indépendants. Il en résulte que, pour tout $f \in \mathfrak{B}$ et pour tout $f^* \in \mathfrak{B}^*$, on a

$$(f^*, Pf) = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k(f^*, \varphi^k) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k^*, f)(f^*, \varphi_k) = \left(\sum_{k=1}^{n}(f^*, \varphi_k)\varphi_k^*, f\right),$$

donc

(11) $$P^*f^* = \sum_{k=1}^{n}(f^*, \varphi_k)\,\varphi_k^*,$$

c'est-à-dire que le sous-espace spectral (ou principal) $\mathfrak{M}^*$ correspondant à T^* et à la valeur $\bar{\lambda}$, est déterminé par les éléments linéairement indépendants φ_k^*, ce qui prouve que $\mathfrak{M}^*$ est aussi de dimension n.

Si $n=1$, il n'y a qu'un seul φ et un seul φ^*: en posant $f^* = \varphi^*$ dans (11) on voit que

(12) $$(\varphi^*, \varphi) = 1.$$

λ et $\bar{\lambda}$ sont alors des valeurs propres simples de T et T^*; φ et φ^* sont des éléments propres correspondants qu'on peut normer en exigeant, outre (12), que

(13) $$\|\varphi\| = \|\varphi^*\|.$$

Tout ce qui vient d'être dit est plus ou moins connu, ou bien découle d'une manière presque évidente de faits connus.[4])

Voici encore un lemme qui nous sera utile dans ce qui suit:

Lemme. *Soient P et Q des projections parallèles de l'espace $\mathfrak{B}$ sur ses sous-espaces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. Si l'on a $\|P-Q\|<1$, les sous-espaces $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont de même dimension*[5]).

Démonstration. Grâce à l'hypothèse que $\|P-Q\|<1$, la transformation $I-(P-Q)$ admet une inverse partout définie et bornée; donc $I-P+Q$ applique $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}$ tout entier: $(I-P+Q)\,\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$. Il s'ensuit que $P(I-P+Q)\mathfrak{B}=P\mathfrak{B}$, donc $PQ\mathfrak{B}=P\mathfrak{B}$, $P\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}$. La projection P applique donc le sous-espace $\mathfrak{Q}$ sur le sous-espace $\mathfrak{P}$ tout entier. On a de plus, pour tout $g\in\mathfrak{Q}$,

$$\|P\|\cdot\|g\|\geqq\|Pg\|=\|Qg+(P-Q)g\|=\|g+(P-Q)g\|\geqq$$
$$\geqq\|g\|-\|(P-Q)g\|\geqq(1-\|P-Q\|)\,\|g\|,$$

donc, pour deux éléments quelconques $g_1, g_2\in\mathfrak{Q}$:

$$\|P\|\geqq\frac{\|Pg_2-Pg_1\|}{\|g_2-g_1\|}\geqq 1-\|P-Q\|,$$

d'où il s'ensuit que P applique $\mathfrak{Q}$ sur $\mathfrak{P}$ d'une manière linéaire, biunivoque et bicontinue. Cela prouve que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont de même dimension.

3. Perturbations du spectre.

Soit T_0 une transformation linéaire fermée de l'espace $\mathfrak{B}$ en lui-même, ayant son domaine $\mathfrak{D}$ dense dans $\mathfrak{B}$. Supposons que son spectre $\sigma(T_0)$ se décompose en deux parties isolées complémentaires, σ_0 et σ_0', et cela de sorte qu'il y ait une courbe fermée rectifiable C, passant dans l'ensemble résolvant $\varrho(T_0)$, et ayant σ_0 dans son intérieur et σ_0' à son extérieur.

Comme

$$R_z=(T_0-zI)^{-1}$$

est une fonction analytique régulière de z dans $\varrho(T_0)$, $\|R_z\|$ est une fonction continue, donc, *si z parcourt C, on a*

$$(14)\qquad M=\max\|R_z\|<\infty,\qquad N=\max\|T_0R_z\|=\max\|I+zR_z\|<\infty.$$

[4]) Nous citons F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913), p. 113–121, et parmi les contributions récentes, N. Dunford, Spectral theory. I. Convergence to projections, *Transactions American Math. Society*, 54 (1943), p. 185–217, et A. E. Taylor, Spectral theory of closed distributive operations, *Acta Math.*, 84 (1951), p. 189—224.

[5]) Pour l'espace hilbertien, ce lemme était démontré l. c. [1]).

Si l'espace est hilbertien et si la transformation T_0 est normale, on a

$$M = \max\left|\frac{1}{\lambda - z}\right|, \qquad N = \max\left|1 + \frac{z}{\lambda - z}\right|$$

où z et λ parcourent respectivement la courbe C et le spectre de T_0, donc M est la réciproque de la distance d de C à $\sigma(T_0)$. Dans le cas général, on peut affirmer seulement que $M \geqq \frac{1}{d}$, ce qui découle immédiatement du fait connu que, avec un point z, tous les points ζ tels que $|\zeta - z| < \|R_\zeta\|^{-1}$ appartiennent à $\varrho(T_0)$.

Cela étant, envisageons la transformation "perturbée"

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \ldots$$

où ε est un paramètre réel ou complexe; les coefficients T_k sont des transformations de $\mathfrak{B}$, ayant le même domaine $\mathfrak{D}$, et satisfaisant aux inégalités

$$\text{(15)} \qquad \|T_k f\| \leqq p^{k-1}(a\|f\| + b\|T_0 f\| \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

D'après le théorème 3, $T(\varepsilon)$ est, du moins si $|\varepsilon| < (p + b)^{-1}$, fermée et de domaine $\mathfrak{D}$. Vu que R_z prend ses valeurs dans $\mathfrak{D}$, les transformations $T_k R_z$ sont partout définies dans $\mathfrak{B}$; grâce à (15) on a, pour tout $g \in \mathfrak{B}$,

$$\|T_k R_z g\| \leqq p^{k-1}(a\|R_z g\| + b\|T_0 R_z g\|) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Il résulte de (14) que, pour z situé sur C,

$$\|T_k R_z\| \leqq p^{k-1}\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

où

$$\text{(16)} \qquad \alpha = aM + bN.$$

On voit tout comme dans le Mémoire cité [1]) que, pour $|\varepsilon| < (p + \alpha)^{-1}$, l'ensemble résolvant de $T(\varepsilon)$ comprend tous les points z de C, et qu'on a

$$R_z(\varepsilon) = [T(\varepsilon) - zI]^{-1} = R_z \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k T_k R_z\right]^\nu = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n R_{z,n}$$

où $R_{z,0} = R_z$ et

$$\text{(17)} \qquad \|R_{z,n}\| \leqq M\alpha(p + \alpha)^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

En désignant par $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ et $\mathfrak{M}'(\varepsilon)$ les sous-espaces spectraux correspondant respectivement aux parties de $\sigma(T(\varepsilon))$ situées dans l'intérieur et à l'extérieur de C, la projection spectrale correspondante $P(\varepsilon)$ s'exprimera par

$$\text{(18)} \qquad P(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_z(\varepsilon)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n P_n$$

où

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_{z,n}\, dz.$$

En désignant par λ_0 une valeur complexe fixée quelconque, on a de plus (cf. (10)):

$$(19)\qquad [T(\varepsilon)-\lambda_0 I]\,P(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-\lambda_0)\,R_z(\varepsilon)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n B_n$$

où

$$B_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-\lambda_0)\,R_{z,n}\,dz \qquad (n=1,2\ldots).$$

De (17) il découle que

$$(20)\quad \|P_n\| \leqq \frac{|C|}{2\pi} M\alpha(p+\alpha)^{n-1}, \quad \|B_n\| \leqq \frac{|C|}{2\pi}\varDelta M\alpha(p+\alpha)^{n-1} \quad (n=1,2,\ldots)$$

où $|C|$ et $\varDelta$ désignent respectivement la longueur d'arc de C et la distance maximum de λ_0 aux points de C.

Dès que

$$|\varepsilon| < \left(p+\alpha+\frac{|C|}{2\pi}M\alpha\right)^{-1},$$

on aura

$$\|P(\varepsilon)-P_0\| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}|\varepsilon|^n\|P_n\| \leqq \frac{|C|}{2\pi}M\alpha\frac{|\varepsilon|}{1-|\varepsilon|(p+\alpha)} < 1,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme démontré plus haut, que *les sous-espaces* $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ *et* $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}(0)$ *sont de même dimension.*

Envisageons en particulier la perturbation d'un *point isolé* λ_0 du spectre de T_0. Si la distance de λ_0 au reste de $\sigma(T_0)$ est égale à d, on prendra pour C par exemple le cercle de centre λ_0 et de rayon $r=\frac{d}{2}$; on aura alors $\frac{|C|}{2\pi}=\varDelta=r$. Quant aux valeurs M et N, on aura en tout cas

$$N = \max_{z\in C}\|I+(z-\lambda_0)R_z+\lambda_0 R_z\| \leqq 1+(r+|\lambda_0|)M,$$

$$(21)\qquad M \geqq \frac{1}{r};$$

dans (21) il y a égalité par exemple si l'espace est hilbertien et si la transformation T_0 est normale.

Si la multiplicité principale de λ_0 comme point de $\sigma(T_0)$ est *finie,* soit égale à m, c'est-à-dire si le sous-espace $\mathfrak{M}_0$ est de dimension m, il en sera de même du sous-espace $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ pour

$$|\varepsilon| < (p+\alpha+rM\alpha)^{-1},$$

et par conséquent il n'y aura qu'un nombre fini de points de $\sigma(T(\varepsilon))$ dans l'intérieur du cercle C, la somme des multiplicités principales de ces points étant égale à m.[6])

Le cas le plus simple se présente si $m=1$. Il n'y aura alors qu'un *seul* point de $\sigma(T(\varepsilon))$ dans l'intérieur de C, soit $\lambda(\varepsilon)$, et lui aussi de multiplicité principale 1. Les valeurs conjuguées $\bar{\lambda}_0$, $\overline{\lambda(\varepsilon)}$ sont alors également de multiplicité principale 1 par rapport aux transformations adjointes T_0^*, $T^*(\varepsilon)$. Soient φ_0 un élément propre de T_0 correspondant à λ_0 et φ_0^* un élément propre de T_0^* correspondant à $\bar{\lambda}_0$; on peut les choisir de sorte que

$$(\varphi_0^*, \varphi_0)=1, \qquad \|\varphi_0\|=\|\varphi_0^*\|;$$

alors

(22) $$\omega_0=\|\varphi_0^*\|\,\|\varphi_0\|\geqq|(\varphi_0^*,\varphi_0)|=1.\ ^{7)}$$

Posons

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{P(\varepsilon)\varphi_0}{(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)^{1/2}},\quad \varphi^*(\varepsilon)=\frac{P^*(\varepsilon)\varphi_0^*}{(\varphi_0^*,P(\varepsilon)\varphi_0)^{1/2}},$$

la racine carrée étant choisie de sorte qu'elle soit une fonction analytique de ε se réduisant à 1 pour $\varepsilon=0$. $\varphi(\varepsilon)$ et $\varphi^*(\varepsilon)$ sont des éléments propres correspondant respectivement à $T(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)$ et à $T^*(\varepsilon), \overline{\lambda(\varepsilon)}$; on a de plus

$$(\varphi(\varepsilon),\varphi^*(\varepsilon))=\frac{(P(\varepsilon)\varphi_0,P^*(\varepsilon)\varphi_0^*)}{(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)}=\frac{(P^2(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)}{(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)}=1.\ ^{8)}$$

D'autre part, on a

$$T(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)=\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon),$$

d'où

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda_0=\frac{([T(\varepsilon)-\lambda_0 I]\varphi(\varepsilon),\varphi_0^*)}{(\varphi(\varepsilon),\varphi_0^*)}.$$

En faisant usage da (18) et de (19) et en observant que $B_0=(T_0-\lambda_0 I)P_0=$ $=O$, on obtient les développements, d'abord formels,

(23) $$\varphi(\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(P_k\varphi_0,\varphi_0^*)\right]^{\nu}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l P_l\varphi_0,$$

(24) $$\lambda(\varepsilon)-\lambda_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(P_k\varphi_0,\varphi_0^*)\right]^{\nu}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l(B_l\varphi_0,\varphi_0^*).$$

Vu que $\|P_0\varphi_0\|=\|\varphi_0\|=\omega\leqq\omega rM$, et que pour $n=1,2,\ldots$:

$$\|P_n\varphi_0\|\leqq rM\alpha(p+\alpha)^{n-1}\omega,\qquad \|B_n\varphi_0\|\leqq r^2M\alpha(p+\alpha)^{n-1}\omega$$

---

[6]) Comme il s'agit d'une transformation de l'espace $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ de dimension finie m, on n'a qu'à renvoyer à des faits bien connus de l'algèbre linéaire.

[7]) Si l'espace est hilbertien et si la transformation T_0 est normale, on a $\varphi_0=\varphi_0^*$, et alors $\omega^2=1$.

[8]) De plus on a

$$(\varphi(\varepsilon),\varphi_0^*)=(P(\varepsilon)\varphi_0,\varphi_0^*)^{1/2}=(\varphi_0,\varphi^*(\varepsilon)).$$

en vertu de (20), les coefficients des développements (23) et (24) sont majorés par les coefficients respectifs des développements

$$\frac{\omega r M(1-\varepsilon p)}{[1-\varepsilon(p+\alpha)]^{1/2}\,[1-\varepsilon(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)]^{1/2}}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\right|\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\omega^2 r M\alpha(p+\alpha)^{k-1}\right]^{\nu}.\,\omega r M\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\alpha(p+\alpha)^{l-1}\right)$$

et

$$\frac{\varepsilon\omega^2 r^2 M\alpha}{1-\varepsilon(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\omega^2 r M\alpha(p+\alpha)^{k-1}\right]^{\nu}.\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\omega^2 r^2 M\alpha(p+\alpha)^{l-1}.$$

Ces développements-ci étant valables et absolument convergents pour

$$|\varepsilon|<(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)^{-1}.$$

il s'ensuit que pour ces valeurs de ε, les développements (23) et (24) sont valables eux aussi et qu'on les peut réarranger suivant les puissances de ε:

$$\varphi(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\varphi_n,\quad \lambda(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\lambda_n.$$

En comparant les coefficients de ces séries aux coefficients des séries entières des fonctions majorantes, on voit que, pour $n\geqq 1$,

$$\|\varphi_n\|\leqq\omega r M(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)^n$$

et

$$|\lambda_n|\leqq\omega^2 r^2 M\alpha(p+\alpha+\omega^2 r M\alpha)^{n-1}.$$

Puisque $\|P_n^*\|=\|P_n\|$, on a un développement analogue pour $\varphi^*(\varepsilon)$:

$$\varphi^*(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\varepsilon}^n\varphi_n^*,$$

dont les coefficients φ_n^* vérifient les mêmes inégalités que nous venons d'obtenir pour les φ_n.

Résumons: *Si λ_0 est un point isolé du spectre de T_0, de multiplicité principale* 1, *la transformation perturbée $T(\varepsilon)$ aura, pour $|\varepsilon|$ assez petit, un seul point du spectre dans le voisinage de λ_0, et ce point $\lambda(\varepsilon)$ sera aussi de multiplicité principale* 1. *$\lambda(\varepsilon)$ et les éléments propres correspondants $\varphi(\varepsilon)$ de $T(\varepsilon)$ et $\varphi^*(\varepsilon)$ de $T^*(\varepsilon)$, normés par la condition $(\varphi^*(\varepsilon), \varphi(\varepsilon))$, peuvent être développés en séries entières de ε (respectivement de $\bar{\varepsilon}$). Pour ces séries, on a obtenu des évaluations de leur rayon de convergence et de l'ordre de grandeur de leurs coefficients.*

Ce résultat n'est plus valable en général si la multiplicité principale de λ_0 est supérieure à 1. Voici trois exemples simples où il s'agit de transformations linéaires de l'espace euclidien complexe à deux dimensions, transformations que nous représentons par leurs matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix},\qquad b)\ \begin{pmatrix}0 & \varepsilon^2\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix},\qquad c)\ \begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dans tous ces exemples, le spectre de la transformation non perturbée ($\varepsilon = 0$) est constitué du seul point $\lambda = 0$ et celui-ci est de multiplicité principale 2; sa multiplicité propre est égale à 1 dans l'exemple *a*), et à 2 dans les exemples *b*) et *c*). Le spectre de la transformation perturbée ($\varepsilon \neq 0$) est constitué, dans l'exemple *a*), des points $\lambda = \pm \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, et dans l'exemple *b*), des points $\lambda = \pm \varepsilon^{\frac{3}{2}}$; aucun d'eux n'est une fonction analytique régulière de ε au point $\varepsilon = 0$. Dans l'exemple *c*), le spectre de la transformation perturbée est constitué du seul point $\lambda = 0$, mais celui-ci sera de multiplicité propre 1.

Remarquons, pour terminer, et sans entrer dans les détails, qu'il est possible de calculer les coefficients des séries $\lambda(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$, $\varphi^*(\varepsilon)$, de proche en proche, par une méthode analogue à celle employée dans le cas des transformations autoadjointes.

(Reçu le 1 juillet 1951)