Sur un théorème d'Harish-Chandra.

Par J. DIXMIER à Dijon.

Le théorème qui fait l'objet principal de cet article a été démontré récemment par HARISH-CHANDRA ([**5**], th. 4). La démonstration donnée ici suit celle d'HARISH-CHANDRA dans ses points essentiels. Cependant, plusieurs simplifications de détail rendent l'exposé plus rapide que celui de [**5**], et permettent d'éviter l'usage des sous-algèbres de Cartan; en outre, le résultat obtenu est un peu plus général que celui de [**5**]. On verra aussi que certaines considérations très simples, nécessaires pour la démonstration précédente, permettent d'obtenir d'autres résultats de [**5**] (liés au th. 5 de [**5**]), établis par HARISH-CHANDRA au moyen de procédés moins élémentaires. Ces derniers résultats ont été publiés en même temps par R. GODEMENT [**3**], et notre démonstration est d'ailleurs voisine de celle de [**3**]. En fait, nous démontrons un résultat un peu plus général que ceux de [**3**] et [**5**].

Sauf mention expresse du contraire, toutes les algèbres et tous les espaces vectoriels considérés sont sur le corps complexe. L'unité d'une algèbre est toujours désignée par 1.

1. Quelques résultats connus sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

Le mode de présentation de certains des résultats qui suivent m'a été suggéré par H. CARTAN et J. P. SERRE.

1. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie. Soit T l'algèbre tensorielle ([**2**]) de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$. Soit I l'idéal bilatère de T engendré par les éléments de la forme $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1, a_2]$, $a_1 \in \mathfrak{a}$, $a_2 \in \mathfrak{a}$. Soit S le sous-espace de T formé des tenseurs symétriques. Alors, *T est la somme directe de S et I* (cf. [**4**], th. I; cette propriété est aussi une conséquence facile des résultats de [**1**] et [**6**], établis sans le théorème d'ADO). Considérons l'algèbre associative $A = T/I$ (nous noterons aa' le produit de deux éléments a, a' de A). L'application canonique de T sur A applique biunivoquement S sur A. En particulier, on peut identifier désormais $\mathfrak{a} \subset S$ à un sous-espace de A; A est engendré par $\mathfrak{a}$ et 1. D'autre part, toute représentation ν de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ se prolonge de manière unique en une représentation unitaire ν' de l'algèbre associative T, qui s'annule sur les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1, a_2]$, donc sur I, de sorte que ν' définit par passage au quotient une représentation unitaire ν_1 de l'algèbre associative A; ν_1 est la seule représentation unitaire de A prolongeant ν; réciproquement, toute représentation de l'algèbre associative A fournit, par restriction à $\mathfrak{a}$, une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. La recherche des représentations de $\mathfrak{a}$ équivaut donc à celle des représentations de A. L'algèbre A s'appelle *l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{a}$.

2. Sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$, introduisons l'unique structure d'algèbre de Lie commutative. L'idéal I correspondant dans T est l'idéal bilatère engendré par les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$, $a_1 \in \mathfrak{a}$, $a_2 \in \mathfrak{a}$; nous le désignerons par I'. L'algèbre T est la somme directe de S et I'. Si nous identifions cette fois l'algèbre commutative T/I' à S, S se trouve muni d'une structure multiplicative qui fait de S *l'algèbre symétrique* bien connue de $\mathfrak{a}$ (algèbre de polynômes).

Revenons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ initiale. Soit γ la restriction à S de l'application canonique de T sur A. On a vu que γ est un isomorphisme de l'espace S sur l'espace A. Mais γ n'est pas un isomorphisme d'algèbre (S est commutative, A ne l'est pas en général). Il existe cependant entre les structures multiplicatives de S et A une relation simple que nous allons préciser.

Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S. On a: $S^r S^{r'} \subset S^{r+r'}$: S est une algèbre *graduée*. Soit $A^r = \gamma(S^r)$. Nous dirons que les éléments de A^r sont les éléments symétriques homogènes de degré r de A. L'espace A est la somme directe des A^r; A^0 est l'ensemble des multiples scalaires de 1; et $A^1 = \mathfrak{a}$. Soit $A_r = A^0 + A^1 + \cdots + A^r$; on voit aisément que A_r est l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de r éléments de $\mathfrak{a}$ au plus. Donc $A_r A_{r'} \subset A_{r+r'}$: A est une algèbre *filtrée* par les A_r (mais non graduée par les A^r). Un élément $a \neq 0$ de A sera dit de degré r s'il est contenu dans A_r mais non dans A_{r-1}, autrement dit si sa composante symétrique homogène non nulle de degré maximum est de degré r. Ainsi, γ conserve le degré. Ceci posé, soient $s \in S$, $s' \in S$, avec $d^0 : s \leqq r$, $d^0 : s' \leqq r'$; alors $\gamma(s)\gamma(s')$ *et* $\gamma(ss')$ *sont congrus modulo* $A_{r+r'-1}$ (cf. [4], p. 906). On peut aussi exprimer ce résultat de la manière suivante. Construisons *l'algèbre graduée B associée à l'algèbre filtrée A*: soit B_r l'espace A_r/A_{r-1}, pour $r = 0, 1, 2, \ldots$ (on pose $A_{-1} = 0$), et soit B la somme directe des B_r; le produit dans A définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $B_r \times B_{r'}$ dans $B_{r+r'}$; d'où, par linéarité, une application bilinéaire de $B \times B$ dans B; autrement dit, B se trouve munie d'une structure d'algèbre, graduée par les B_r. Il y a un isomorphisme canonique évident de l'espace B_r sur l'espace A^r donc sur l'espace S^r; d'où un isomorphisme canonique de l'espace B sur l'espace S, qui, d'après ce qui précède, est un isomorphisme *d'algèbres*.

2. Sous-algèbres de $\mathfrak{a}$ et sous-algèbres de A.

1. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, A son algèbre enveloppante, $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$, G la sous-algèbre de A engendrée par $\mathfrak{g}$. Soit G' l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Il existe un homomorphisme φ de G' sur G tel que $\varphi(1)=1$, $\varphi(g)=g$ pour $g\in\mathfrak{g}$. Soit $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une base de $\mathfrak{a}$ telle que $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}$. Les $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_r}$ (calculés dans G'); où $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ est une suite croissante (au sens large) quelconque d'entiers compris entre 1 et n, forment une base de l'espace G', et leurs images par φ sont linéairement indépendantes dans A (cf. **[1]**, **[4]**, **[6]**); donc φ est biunivoque. (Ceci est exactement la démonstration de **[5]**, lemme 21). Nous identifierons désormais G' à G par l'isomorphisme φ.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}=0$. Soit $H\subset A$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. L'application bilinéaire $(g,h)\to gh$ de $G\times H$ dans A définit une application linéaire θ de $G\otimes H$ dans A telle que $\theta(g\otimes h)=gh$. On peut supposer que $g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots, g_m$ forment une base de $\mathfrak{h}$. Les $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_r}\otimes$ $\otimes g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s}$ (où $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ est une suite croissante quelconque d'entiers compris entre $n+1$ et m) forment une base de $G\otimes H$; or, les $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_r}g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s}$ forment une base de A. Donc θ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $G\otimes H$ sur l'espace vectoriel A.

Soient I_1 un idéal à gauche de H, I l'idéal à gauche de A engendré par I_1. Montrons que $\theta(G\otimes I_1)=I$. Un élément de $G\otimes I_1$ est de la forme $\sum_i g^i\otimes h^i$ avec $g^i\in G, h^i\in I_1$; or $\theta(\sum_i g^i\otimes h^i)=\sum_i g^i h^i\in I$. Réciproquement, un élément de I est de la forme $\sum_i a^i h^i$, avec $h^i\in I_1$, $a^i\in A$, donc $a^i=\sum_j g^i_j h^i_j$, $g^i_j\in G, h^i_j\in H$ d'après ce qui précède; or $\theta^{-1}(\sum_i\sum_j g^i_j h^i_j h^i)=\sum_i\sum_j g^i_j\otimes h^i_j h^i$ $\in G\otimes I_1$.

Ceci nous permet d'identifier, ce que nous ferons désormais, l'espace A/I à l'espace $G\otimes H/G\otimes I_1=G\otimes(H/I_1)$.

2. Pour $a\in\mathfrak{a}, a'\in A$, posons $\nu_1(a)a'=[a,a']=aa'-a'a$; ν_1 est une représentation de $\mathfrak{a}$ qui s'effectue dans l'espace A et se réduit, dans $\mathfrak{a}$ à la représentation adjointe usuelle. Pour a fixé, $\nu_1(a)$ est une dérivation de A.

On suppose désormais que $\mathfrak{g}$ est un *idéal* de $\mathfrak{a}$. Alors, $\mathfrak{g}$ est stable pour ν_1, donc aussi G. Les restrictions des $\nu_1(a)$ à G, qui sont des dérivations de G, définissent une représentation ν_2 de $\mathfrak{a}$. La restriction de ν_2 à $\mathfrak{h}$ est une représentation ν de $\mathfrak{h}$ qui s'effectue dans l'espace G.

Soient $a\to a^*$ et $h\to\bar{h}$ les applications canoniques de A dans $A^*=A/I$ et de H dans $\bar{H}=H/I_1$. Soient ν_I et ν_{I_1} les représentations canoniques de A et H dans A^* et $\bar{H}$ respectivement. Nous identifions désormais une représentation d'une algèbre de Lie et la représentation correspondante de son algèbre enveloppante. Alors, on a, pour $h_1 \in \mathfrak{h}, g \in G, h \in H$:

$$\nu_I(h_1)(g\otimes\bar{h}) = \nu_I(h_1)((gh)^\bullet) = (h_1 gh)^\bullet = ([h_1, g]h + gh_1 h)^\bullet$$
$$= [h_1, g]\otimes\bar{h} + g\otimes\overline{h_1 h} = \nu(h_1)g\otimes\bar{h} + g\otimes\nu_{I_1}(h_1)\bar{h}$$

donc

(1) $$\nu_I(h_1) = \nu(h_1)\otimes 1 + 1\otimes\nu_{I_1}(h_1).$$

3. Remarques sur les représentations des algèbres de Lie.

1. Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, H son algèbre enveloppante. Soit Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. La représentation nulle s'effectuant dans un espace de dimension 1 définit un élément δ_0 de Δ. Une fois pour toutes, nous choisirons, pour tout $\delta \in \Delta$, 1. une représentation ν_δ de classe δ de $\mathfrak{h}$, s'effectuant dans un espace U_δ; 2. un sous-espace U'_δ de U_δ de dimension 1; l'ensemble des $h \in H$ tels que $\nu_\delta(h)U'_\delta = 0$ est un idéal à gauche maximal I_δ de H; H/I_δ est de dimension finie; 3. un élément $h_\delta \in H$ tel que $\nu_\delta(h_\delta)$ soit un projecteur sur U'_δ (théorème de Burnside).

Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V. Pour $\delta \in \Delta$, on désigne par V_δ l'espace engendré par les sous-espaces stables de V dans lesquels ν induit une représentation de classe δ. Les éléments de V_{δ_0} sont les éléments annulés par ν, encore appelés *invariants*. V_δ est stable pour ν. Si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sont des éléments distincts de Δ, il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)$ se réduise à 1 dans V_{δ_1}, à 0 dans les V_{δ_i}, $i>1$ (théorème de Burnside généralisé); il en résulte que la somme $\sum V_\delta$ est directe.

Si W est un sous-espace stable de V, on a $W_\delta = V_\delta \cap W$. Soient d'autre part $v \to v^\bullet$ l'application canonique de V sur $V^\bullet = V/W$, et $\nu^\bullet$ la représentation induite par ν dans $V^\bullet$. Si $v \in V_\delta$, on a $v^\bullet \in (V^\bullet)_\delta$, donc $(V^\bullet)_\delta \supset (V_\delta)^\bullet$. Si de plus $V = \sum V_\delta$, on a $V^\bullet = \sum (V_\delta)^\bullet$, donc, la somme $\sum (V^\bullet)_\delta$ étant directe, $(V^\bullet)_\delta = (V_\delta)^\bullet$.

Si $V = \sum_\iota V^\iota$ est une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables pour ν, on a $V_\delta = \sum_\iota (V_\delta \cap V^\iota) = \sum_\iota (V^\iota)_\delta$.

Si $v \in \sum V_\delta$, le sous-espace $W = \nu(H)v$ est de dimension finie. Réciproquement, si W est de dimension finie, et si $\mathfrak{h}$ est semi-simple, on a $v \in \sum V_\delta$; en effet, W, qui est stable pour ν, est alors complètement réductible.

2. Soit $\delta \in \Delta$. La représentation $-{}^t(\nu_\delta)$ qui s'effectue dans l'espace dual de U_δ, définit un élément de Δ que nous désignerons par δ^*. Ceci posé, considérons, dans $W = V\otimes U_{\delta^*}$, la représentation $\nu\otimes 1 + 1\otimes\nu_{\delta^*}$. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une base de U_{δ^*}. Alors, si $w = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$, le sous-espace V' de V engendré par les v_i est stable, et ν induit dans V' une représentation de classe δ, ou bien $V' = 0$. Réciproquement, si ν induit dans un sous-espace stable V' de V une représentation de classe δ, on peut choisir une base $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V' telle que $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$.

3. Soit V^δ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\nu(I_\delta)v = 0$. On a: $V^\delta \subset V_\delta$. En outre, $\nu(h_\delta)$ se réduit, sur V_δ, à un projecteur sur V^δ. En effet: α) si $v \in V_\delta$, $\nu(h_\delta)v \in V^\delta$; car il suffit de le prouver quand v appartient à un sous-espace stable W de V_δ dans lequel ν induit une représentation de classe δ; et $\nu(h_\delta)$ se réduit dans W à un projecteur sur un sous-espace W' de dimension 1 de W qui est tel que $\nu(I_\delta) W' = 0$, donc tel que $W' \subset V^\delta$; β) si $v \in V^\delta$, $v \neq 0$, il existe un isomorphisme entre $\nu(H)v$ muni de la représentation induite par ν, et U_δ muni de ν_δ, et cet isomorphisme transforme U'_δ en la variété à une dimension engendrée par v; donc $\nu(h_\delta)v = v$.

Ceci posé, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des éléments de $\sum V_\delta$; $v'_1, v'_2, \ldots, v'_p$ des éléments de V^δ. *Il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)v_i \in V^\delta$, $\nu(h)v'_j = v'_j$*: en effet, on peut se ramener au cas où $v_i \in V_{\delta_i}$; soit $h' \in H$ tel que $\nu(h')$ se réduise à 1 dans V_δ, à 0 dans les $V_{\delta_i} \neq V_\delta$; alors $h = h_\delta h'$ répond à la question.

4. Si V est une algèbre, et si $\nu(h)$ est, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, une dérivation de V, chaque V_δ est un V_{δ_0}-module (à gauche, par exemple). Car soient $h \in \mathfrak{h}$, $v \in V_\delta$, $v_0 \in V_{\delta_0}$; on a: $\nu(h)(v_0 v) = v_0(\nu(h)v)$; donc, si ν induit dans $\nu(H)v$ une représentation de classe δ, on a $\nu(H)(v_0 v) = 0$, ou bien la représentation induite dans $\nu(H)(v_0 v)$ est de classe δ; donc $v_0 v \in V_\delta$. En particulier, V_{δ_0} est une sous-algèbre de V. Pour $v \in \sum V_\delta$, désignons par v^0 la composante de v dans V_{δ_0}; l'application $v \to v^0$ est un projecteur de $\sum V_\delta$ sur V_{δ_0}; si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in V_\delta$, on a $v_0 v \in V_\delta$, donc $(v_0 v)^0 = 0 = v_0 v^0$ si $\delta \neq \delta_0$, et $(v_0 v)^0 = v_0 v = v_0 v^0$ si $\delta = \delta_0$; donc, si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in \sum V_\delta$, on a: $(v_0 v)^0 = v_0 v^0$. De même: $(v v_0)^0 = v^0 v_0$.

4. Etude des V_δ dans certains cas particuliers.

1. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie *semi-simple*. Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V de dimension finie. Soit $S \supset V$ l'algèbre symétrique de V. Pour $h \in \mathfrak{h}$, $\nu(h)$ se prolonge d'une manière unique en une dérivation $\tilde{\nu}(h)$ de S, et $\tilde{\nu}$ est encore une représentation de $\mathfrak{h}$: car, si $h_1 \in \mathfrak{h}$, $[\tilde{\nu}(h), \tilde{\nu}(h_1)]$ et $\tilde{\nu}([h, h_1])$ sont deux dérivations de S qui coïncident sur V, donc sont identiques. Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S. S^1 est stable pour $\tilde{\nu}$, donc aussi S^r. Comme $S = \sum_{1}^{\infty} S^r$ et que $\dim S^r < +\infty$, on voit que $S = \sum_\delta S_\delta$, et $S_\delta = \sum_r (S_\delta \cap S^r)$. Soit $\bar{S} = S^1 + S^2 + \ldots$. Soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ une base de l'idéal engendré par l'algèbre $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$ dans S. On peut évidemment supposer que les s_i appartiennent à $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$ et sont homogènes. Nous allons voir que S_{δ_0} est *l'algèbre* engendrée par $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Soit $s \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$. L'élément s est une somme de produits $s_i s_i'$, où on peut supposer les $s_i' \in S$ homogènes, avec $d^0 : s_i' < d^0 : s$; donc $s = s^0$ est somme de produits $(s_i s_i')^0 = s_i s_i'^0$, avec des $s_i'^0 \in S_{\delta_0}$ homogènes, et $d^0 : s_i'^0 < d^0 : s$. Si les $s_i'^0$ sont des scalaires, s est bien dans l'algèbre engendrée par les s_i. Sinon, $s_i'^0 \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$, et on recommence le même raisonnement. Par récurrence sur le degré de s, notre assertion est démontrée. Ceci est le théorème fondamental de la théorie des invariants, et la démonstration ci-dessus, classique dans son principe, m'a été indiquée par R. GODEMENT.

L e m m e 1. *Chaque S_δ est un S_{δ_0}-module de type fini.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit T l'algèbre symétrique de U_{δ^*}, $\tilde{\nu}_{\delta^*}$ la représentation (dans T) prolongée de ν_{δ^*} (dans U_{δ^*}). Soit $\tilde{\xi} = \tilde{\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\nu}_{\delta^*}$ dans $S \otimes T$, algèbre symétrique (bigraduée) de la somme directe $V + U_{\delta^*}$; $\tilde{\xi}(h)$ n'est autre que la dérivation de $S \otimes T$ prolongeant l'endomorphisme $\xi(h)$ de $V + U_{\delta^*}$ qui est défini par $\nu(h)$ dans V, $\nu_{\delta^*}(h)$ dans U_{δ^*}. Considérons un système fini de générateurs de $(S \otimes T)_{\delta_0}$. Comme les projecteurs de la bigraduation sont permutables aux $\tilde{\xi}(h)$ on peut supposer ces générateurs doublement homogènes. Soient $j_1, j_2, \ldots, j_l$ ceux dont le deuxième degré est 1; $w_1, w_2, \ldots, w_q$ étant une base de U_{δ^*}, on a: $j_i = \sum_{k=1}^{q} s_k^i \otimes w_k$, avec $s_k^i \in S$. Alors, $s_k^i \in S_\delta$, donc le S_{δ_0}-module M engendré par les s_k^i est contenu dans S_δ. Montrons que $S_\delta = M$. Pour cela, soit S' un sous-espace de S stable pour $\tilde{\nu}$ dans lequel $\tilde{\nu}$ induit une représentation de classe δ, et montrons que $S' \subset M$; comme les S^r sont stables pour $\tilde{\nu}$, on peut supposer $S' \subset S^r$ pour un certain r; pour une base $s_1, s_2, \ldots, s_q$ de S' bien choisie, $\sum_{i=1}^{q} s_i \otimes w_i$ est un élément de $(S \otimes T)_{\delta_0}$, doublement homogène de bidegré $(r, 1)$, donc de la forme $\sum_{k=1}^{l} n_k j_k$, où les n_k sont des éléments de $(S \otimes T)_{\delta_0}$ de bidegré $(r', 0)$, c'est-à-dire des éléments de S_{δ_0}. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{q} s_i \otimes w_i = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{q} n_k \, (s_i^k \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{l} n_k s_i^k \right) \otimes w_i$$

donc $s_i = \sum_{k=1}^{l} n_k s_i^k \in M$.

2. Revenons aux notations du § 2: $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, somme directe d'une sous-algèbre *semi-simple* $\mathfrak{h}$ et d'un idéal $\mathfrak{g}$. Considérons la représentation ν de $\mathfrak{h}$ dans l'espace G qui a été définie au § 2. Soit Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$. On a: $Y = G_{\delta_0}$.

Lemme 2. *$G=\sum G_\delta$, et chaque G_δ est un Y-module (à gauche) de type fini.*

Démonstration. Soit G^r l'ensemble des éléments symétriques homogènes de degré r de G. Soit $G_r=G^0+\cdots+G^r$. Il est immédiat que les G^r sont stables pour ν. Donc, si γ désigne l'application canonique (définie au § 1) de l'algèbre symétrique S de $\mathfrak{g}$ sur G, les $\overset{-1}{\gamma}\circ\nu(h)\circ\gamma=\tilde{\nu}(h)$ sont des dérivations de S, qui ne sont autres que les dérivations uniques prolongeant $\nu(h)$ sur $\mathfrak{g}$; γ est un isomorphisme de l'espace S muni de la représentation $\tilde{\nu}$ sur l'espace G muni de la représentation ν. On a: $S=\sum S_\delta$, et chaque S_δ est un S_{δ_0}-module de type fini (lemme 1). Donc $G=\sum G_\delta$ (ce qui était immédiat directement). Soient d'autre part $s_1, s_2, \ldots, s_p$ des générateurs homogènes du S_{δ_0}-module S_δ. Les $\gamma(s_i)$ sont dans G_δ, soit $M\subset G_\delta$ le G_{δ_0}-module à gauche (par exemple) qu'ils engendrent; montrons que $G_\delta=M$. Comme $G_\delta=$ $=\sum(G_\delta\cap G^r)$, il suffit de prouver que $G_\delta\cap G^r\subset M$. Ceci est évident pour $r=-1$. Supposons $G_\delta\cap G^i\subset M$ pour $i<r$, et prouvons que $G_\delta\cap G^r\subset M$. Un élément de $G_\delta\cap G^r$ est de la forme $\gamma(s)$, avec $s\in S_\delta\cap S^r$; s est une somme d'éléments de la forme $s_i's_i$, les s_i' étant des éléments homogènes de S_{δ_0} tels que $d^0 s_i+d^0 s_i'=r$: $s=\sum s_i's_i$. Or $\gamma(s_i's_i)\equiv\gamma(s_i')\gamma(s_i)\pmod{G_{r-1}}$. Donc $\gamma(s)\equiv\sum\gamma(s_i')\gamma(s_i)\pmod{G_{r-1}}$. Il suffit alors d'observer que $\gamma(s_i')\in G_{\delta_0}$, que $\gamma(s)-\sum\gamma(s_i')\gamma(s_i)\in\sum_{i<r}G_\delta\cap G^i$, et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Corollaire 1. *Soit U un espace de dimension finie dans lequel s'effectue une représentation ϱ de $\mathfrak{h}$. Considérons, dans $G\otimes U$, la représentation $\xi=\nu\otimes 1+1\otimes\varrho$. Alors, $G\otimes U=\sum(G\otimes U)_\delta$ et tout $(G\otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module (à gauche) de type fini.*

Démonstration 1. Le lemme 2 entraîne aussitôt que, pour tout élément $g\otimes u$, $\xi(H)(g\otimes u)$ est de dimension finie. Donc $G\otimes U=\sum(G\otimes U)_\delta$.

2. Soient $\delta\in\Delta$, $\delta'\in\Delta$. Montrons que $(G_{\delta'}\otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ un système de générateurs du G_{δ_0}-module $G_{\delta'}$. Les $\nu(H)g_i\otimes U$ sont de dimension finie, stables, et engendrent le G_{δ_0}-module $G_{\delta'}\otimes U$. Or, $(G_{\delta'}\otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module contenant les $(\nu(H)g_i\otimes U)_\delta$; il en résulte que $(G_{\delta'}\otimes U)_\delta$ est engendré, en tant que G_{δ_0}-module, par les $(\nu(H)g_i\otimes U)_\delta$, donc est de type fini.

3. Montrons que $(G\otimes U)_{\delta_0}$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit $U=\sum_{i=1}^{n}U_i$, chaque U_i étant irréductible; soit δ_i la classe de la représentation induite par ϱ dans U_i. On a: $G\otimes U=\sum_{\delta, i}G_\delta\otimes U_i$, la somme étant directe et chaque $G_\delta\otimes U_i$ étant stable pour ξ. Donc $(G\otimes U)_{\delta_0}=$

$= \sum_{\delta, i} (G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0}$. Or, $(G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0} = 0$ sauf si $\delta = \delta_i^*$. Donc $(G \otimes U)_{\delta_0} =$
$= \sum_{i=1}^{n} (G_{\delta_i^*} \otimes U_i)_{\delta_0}$, et est un G_{δ_0}-module de type fini d'après 2.

4. Montrons que $(G \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0}-module de type fini. Soit V un espace dans lequel s'effectue une représentation σ de $\mathfrak{h}$ de classe δ^*. Considérons, dans $G \otimes U \otimes V$, la représentation $\xi \otimes 1 + 1 \otimes \sigma$. D'après 3, le G_{δ_0}-module $(G \otimes U \otimes V)_{\delta_0}$ admet un système fini de générateurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_p$ une base de V, et soit $x_i = \sum_{j=1}^{p} y_i^j \otimes e_j$, où $y_i^j \in G \otimes U$. Un raisonnement déjà fait prouve que les y_i^j forment un système de générateurs du G_{δ_0}-module $(G \otimes U)_\delta$.

Utilisant toujours les notations du § 2 on a alors le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Considérons la restriction de ν_l à H, qui s'effectue dans l'espace A^*. Si H/I_1 est de dimension finie, on a $A^* = \sum (A^*)_\delta$, et chaque $(A^*)_\delta$ est un Y-module (à gauche) de type fini.*

Ceci résulte aussitôt du corollaire 1 et de la formule (1) du § 1.

5. **Préliminaires sur les algèbres associatives.**

1. Lemme 3. *Soit A une algèbre à élément unité, B une sous-algèbre de A contenant 1, I un idéal à gauche de A. Supposons vérifiée la condition suivante:*

(C_1) $\begin{cases} \textit{Si } a_1, a_2, \textit{ sont des éléments de } A, \textit{ il existe } a \equiv 1 \pmod{I} \textit{ tel que} \\ aa_1 \in B, aa_2 \in B. \end{cases}$

Alors, si L est un idéal à gauche maximal de A contenant I, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B, et la correspondance $L \to L \cap B$ est biunivoque.

Démonstration. Soit M un idéal à gauche de B tel que $L \cap B \subset M$, $M \neq L \cap B$. Soit $m \in M, m \notin L \cap B$. Comme L est maximal, il existe un $a \in A$ avec $am \equiv 1 \pmod{L}$. Soit $a_1 \equiv 1 \pmod{I}$ avec $a_1 a \in B$. On a: $a_1 am \in M$, et $a_1 am \equiv 1 \pmod{L + I = L}$, donc $a_1 am \equiv 1 \pmod{M}$, donc $M = B$. Ainsi, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B.

Soient maintenant L, L' deux idéaux à gauche maximaux de A contenant I tels que $L \cap B = L' \cap B$. Supposons $L \neq L'$. Alors, $1 = l + l'$ avec $l \in L, l' \in L'$. Soit $a \equiv 1 \pmod{I}$ tel que $al \in B, al' \in B$. On a: $a = al + al' \in L \cap B + L' \cap B = L \cap B$. Donc $1 \in L \cap B + I \subset L$, ce qui est absurde.

2. Soient maintenant A une algèbre à élément unité, I un idéal à gauche, B l'ensemble des $a \in A$ tels que $Ia \subset I$. B est une sous-algèbre de A contenant I et le centre Z de A. I est un idéal *bilatère* de B. Soit $a \to a^*$ l'application canonique de A sur *l'espace* $A^* = A/I$; sa restriction à B est un homomorphisme de B sur *l'algèbre* $B^* = B/I$. Soient de plus J un idéal bilatère de A, et $K = I + J$ (idéal a gauche); $K \cap B$ est un idéal bilatère de B. Soit $a \to a^+$ l'application canonique de A sur $A^+ = A\ K$. Soit Ω l'ensemble des idéaux à gauche maximaux de A contenant K.

Lemme 4. *Supposons vérifiés par A, I, B les conditions (C_1) et (C_2): B^+ est de dimension finie.*

Alors, les représentations irréductibles ν_L de A définies canoniquement par les $L \in \Omega$ sont toutes équivalentes à un nombre fini d'entre elles. En outre $\nu_L(z)$ est scalaire pour $z \in Z$.

Démonstration. Soit $b \to b^\sim$ l'homomorphisme canonique de B sur $B^\sim = B/K \cap B$. Les $L \cap B$, $L \in \Omega$, sont des idéaux à gauche maximaux de B contenant $K \cap B$; donc les $(L \cap B)^\sim$ sont des idéaux à gauche maximaux de $B^\sim$. Soit $\nu_L^\sim$ le représentation irréductible de $B^\sim$ définie canoniquement par $(L \cap B)^\sim$. D'après (C_2), $B^\sim$ est de dimension finie, donc il existe un sous-ensemble fini Ω' de Ω tel que toute $\nu_L^\sim$, $L \in \Omega$, soit équivalente à une $\nu_{L'}^\sim$, $L' \in \Omega'$. Ceci posé, soit $L \in \Omega$. Il existe $L' \in \Omega'$ tel que $\nu_L^\sim$ et $\nu_{L'}^\sim$ soient équivalentes. Donc il existe $b_0 \in B, b_0 \notin L$, tel que:

$$b \in B \text{ et } b^\sim b_0^\sim \in (L \cap B)^\sim \Longleftrightarrow b \in B \text{ et } b^\sim \in (L' \cap B)^\sim.$$

Soit M l'ensemble des $a \in A$ tels que $ab_0 \in L$. M est un idéal à gauche maximal de A contenant I et J donc K, donc $M \in \Omega$ et ν_L est équivalente à ν_M. Enfin

$$\begin{aligned} a \in M \cap B &\Longleftrightarrow a \in B \text{ et } ab_0 \in L \Longleftrightarrow a \in B \text{ et } (ab_0)^\sim \in (L \cap B)^\sim \\ &\Longleftrightarrow a \in B \text{ et } a^\sim \in (L' \cap B)^\sim \Longleftrightarrow a \in L' \cap B. \end{aligned}$$

Donc $L' \cap B = M \cap B$ et par suite $L' = M$, de sorte que ν_L est équivalente à $\nu_{L'}$. Ceci démontre la première assertion.

Si maintenant $z \in Z$, on a $z \in B$, et $z^\sim$ appartient au centre de B. Donc $\nu_L^\sim(z^\sim)$ permute aux opérateurs de $\nu_L^\sim$, qui est irréductible et s'effectue dans un espace de dimension finie. Donc il existe un scalaire $\xi(z)$ tel que $z^\sim 1^\sim \equiv \xi(z) 1^\sim$ (mod $(L \cap B)^\sim$), d'où $z - \xi(z) \in L$. Alors, pour tout $a \in A$, on a modulo L: $za = az \equiv a\xi(z) = \xi(z)a$, donc $\nu_L(z) = \xi(z) \cdot 1$.

6. **Le théorème d'Harish-Chandra.**

Comme plus haut, soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{a}$, tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Soient A l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$, $G \subset A$ et $H \subset A$ les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Soient Z le centre de A, et Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$. Soit enfin Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. Si π est une représentation de $\mathfrak{a}$ dans un espace V, et si $\delta \in \Delta$, les notations $V_\delta, I_\delta, \ldots,$ concernent la restriction de π à $\mathfrak{h}$.

Théorème 1. *Soient* $\delta_1 \in \Delta$ *et* χ *un homomorphisme de* Y *dans le corps complexe.*

a) *Il existe seulement un nombre fini de représentations irréductibles inéquivalentes* π *de* A *telles que,* V *étant l'espace de* π, *on ait* $V_{\delta_1} \neq 0$ *et* $\pi(y) = \chi(y) \cdot 1$ *pour* $y \in Y$.

b) *Si* π *est une telle représentation, on a* $V = \sum V_\delta$, *et* $\dim V_\delta < +\infty$ *pour tout* δ.

c) $\pi(z)$ *est scalaire pour* $z \in Z$.

Démonstration. Soit J l'idéal bilatère de A engendré par les $y - \chi(y)$, $y \in Y$. Le noyau de π contient J.

Soit I l'idéal à gauche de A engendré par I_{δ_1}. Puisque $V_{\delta_1} \neq 0$, il existe un $v \in V^{\delta_1}$, $v \neq 0$; on a $\pi(I_{\delta_1})v = 0$, donc $\pi(I)v = 0$. Soit L l'idéal à gauche maximal de A formé des $a \in A$ tels que $\pi(a)v = 0$. On a $L \supset I$ et $L \supset J$, donc $L \supset I + J = K$, et π est équivalente à ν_L.

Soient $a \to a^*$, $a \to a^+$ et $a \to a^\wedge$ les applications canoniques de A sur $A^* = A/I$, $A^+ = A/K$ et $A^\wedge = A/L$; ν_K est un quotient de ν_I, ν_L un quotient de ν_K.

Comme H/I_{δ_1} est de dimension finie, la corollaire 2 du lemme 2 prouve que $A^* = \sum (A^*)_\delta$ et que chaque $(A^*)_\delta$ est un Y-module de type fini. En passant au quotient, et observant que tout élément de Y est congru modulo J à un scalaire, on voit que $A^+ = \sum (A^+)_\delta$ et que chaque $(A^+)_\delta$ est de dimension finie. On en déduit enfin que $A^\wedge = \sum (A^\wedge)_\delta$ et que chaque $(A^\wedge)_\delta$ est de dimension finie, ce qui est le b du théorème.

Pour prouver le a et le c du théorème, nous allons prouver que nous sommes dans les conditions du lemme 4 (avec les mêmes notations). Introduisant l'algèbre B de ce lemme, on a, si $a \in A$:

$$a^* \in B^* \Longleftrightarrow a \in B \Longrightarrow Ia \supset I \Longleftrightarrow (Ia)^* = 0$$
$$\Longleftrightarrow \nu_I(I)a^* = 0 \Longleftrightarrow \nu_I(I_{\delta_1}a^*) = 0 \Longleftrightarrow a^* \in (A^*)^{\delta_1}$$

donc $B^* = (A^*)^{\delta_1}$. Donc $B^+ \subset (A^+)_{\delta_1}$ est de dimension finie, ce qui est la condition (C_2). Enfin, soient a_1, a_2 des éléments de A; comme $A^* = \sum (A^*)_\delta$, il existe un $a \in A$ tel que

$$\nu_I(a)a_1^* \in (A^*)^{\delta_1}, \qquad \nu_I(a)a_2^* \in (A^*)^{\delta_1}, \qquad \nu_I(a)1^* = 1^*,$$

c'est-à-dire $aa_1 \in B$, $aa_2 \in B$, $a \equiv 1 \pmod{I}$, ce qui prouve (C_1), et achève la démonstration du théorème.

Le cas considéré par Harish-Chandra est le suivant: soient $\mathfrak{a}_0$ une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre semi-simple, Γ une application linéaire de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{a}_0$ telles que:

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 + \Gamma(\mathfrak{h}_0) \qquad \mathfrak{h}_0 \cap \Gamma(\mathfrak{h}_0) = 0$$
$$[h_1, \Gamma(h_2)] = \Gamma([h_1, h_2]) \qquad [\Gamma(h_1), \Gamma(h_2)] = -[h_1, h_2]$$

pour $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}_0$. Soient $\mathfrak{a}$ la complexification de $\mathfrak{a}_0$, et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}$ la complexification de $\mathfrak{h}_0$. On étend Γ à $\mathfrak{h}$ par linéarité, et on pose: $\gamma(h) = \frac{1}{2}(h + i\Gamma(h))$ pour $h \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} = \gamma(\mathfrak{h})$. On prouve alors aisément que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$, et que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. En outre, il est facile de voir que Y est le centre de G.

7. Caractères.

Soient toujours $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, A son algèbre enveloppante, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{a}$, $H \subset A$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. Soit ν la représentation de $\mathfrak{h}$ dans l'espace A définie par $\nu(h)a = [h, a]$ pour $h \in \mathfrak{h}, a \in A$; on a vu très simplement que $A = \sum A_\delta$. A_{δ_0} est l'ensemble Y des éléments de A permutables à $\mathfrak{h}$. Soit $A' = \sum\limits_{\delta \neq \delta_0} A_\delta$.

Lemme 5. *A' est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $[h, a]$, $h \in H$, $a \in A$.*

Démonstration. 1. Montrons que tout élément de A' est combinaison linéaire d'éléments de la forme $[h, a]$. Il suffit de le montrer pour tout élément d'un A_δ, $\delta \neq \delta_0$, donc pour tout élément d'un sous-espace U de A, stable pour ν, dans lequel ν induit une représentation de classe $\delta \neq \delta_0$. Considérons les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\nu(h)u = [h, u]$, $h \in \mathfrak{h}$, $u \in U$; ils forment un sous-espace U' de U, stable pour ν, et $\neq 0$ parce que $\delta \neq \delta_0$. Donc $U' = U$ ce qui prouve notre assertion.

2. Réciproquement, montrons que tout élément de la forme $[h, a]$ est contenu dans A'. Supposons d'abord $h \in \mathfrak{h}$. Soit $a = \sum a_\delta$, avec $a_\delta \in A_\delta$. Comme les A_δ sont stables pour ν, on a $[h, a_\delta] = \nu(h)a_\delta \in A_\delta$, et $[h, a_{\delta_0}] = 0$. Donc $[h, a] \in A'$. Si maintenant $h = h_1 h_2 \dots h_n$, avec $h_i \in \mathfrak{h}$, on a:

$$[h, a] = (h_1 h_2 \dots h_n a - h_2 \dots h_n a h_1) + (h_2 \dots h_n a h_1 - h_3 \dots h_n a h_1 h_2) + \\ + \dots + (h_n a h_1 \dots h_{n-1} - a h_1 \dots h_n) \in A'$$

ce qui prouve notre assertion.

Ceci posé, désignons, pour $a \in A$, par a^0 sa composante dans $A_{\delta_0} = Y$. D'après le lemme 5 et le n° 4 du § 3, on a le théorème suivant:

Théorème 2. *Si $a \in A, h \in H, y \in Y$, on a $(ah)^0 = (ha)^0$, $(ay)^0 = a^0 y$, $(ya)^0 = ya^0$.*

Il est alors évident qu'une forme linéaire χ sur A telle que $\chi(ah) = \chi(ha)$ pour $a \in A$, $h \in H$, est déterminée par sa restriction à Y, ceci au moyen de la formule $\chi(a) = \chi(a^0)$. Le cas considéré par Harish-Chandra et Godement est celui où $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$. Appelons caractère de A une forme linéaire χ sur A telle que $\chi(aa') = \chi(a'a)$ pour $a \in A, a' \in A$, et telle que la restriction de χ au centre Z de A soit un homomorphisme de Z dans le corps complexe. On voit qu'il y a une correspondance biunivoque évidente entre les caractères de A et les homomorphismes de Z dans le corps complexe.

Bibliographie.

[1] G. Birkhoff, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Annals of Math.*, **38** (1937), p. 526—532.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. III. (Paris, 1948).

[3] R. Godement, Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, *Journal de Math.*, **30** (1951), p. 1—110.

[4] Harish-Chandra, On representations of Lie algebras, *Annals of Math.*, **50** (1949), p. 900—915.

[5] Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), p. 28—96.

[6] E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, *Journal für Math.*, **177** (1937), p. 152—160.

(Reçu le 15 novembre 1951)