Über die Lage der kritischen Punkte rationaler Funktionen.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

1. Es werden im folgenden rationale Funktionen n-ten Grades

$$R(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n}{\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n} \qquad (|\alpha_n| + |\beta_n| \neq 0) \tag{1}$$

betrachtet, die *irreduzibel* sind, d. h. für die die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ keinen gemeinsamen Polynomteiler besitzen. Unter dem *Index* m von $R(z)$ wird die größte der ganzen Zahlen $k \leqq n-1$ verstanden, für die

$$\alpha_k \beta_n - \beta_k \alpha_n \neq 0 \tag{2}$$

gilt. (Polynome und ihre Reziproken haben insbesondere den Index 0.)

Die Z-Stellen der Funktion $R(z)$ sind die Nullstellen des Polynoms

$$f(z) - Zg(z) = (\alpha_0 - Z\beta_0) + (\alpha_1 - Z\beta_1)z + \cdots + (\alpha_n - Z\beta_n)z^n. \tag{3}$$

Im Falle $\alpha_n - Z\beta_n \neq 0$ hat $R(z)\, n$ endliche Z-Stellen (jede nach ihrer Vielfachheit gerechnet). Ist aber $\alpha_n - Z\beta_n = 0$, also $Z = U = \lim_{z=\infty} R(z)$, so hat die Funktion $R(z)$ nur m endliche U-Stellen $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Der Punkt $z = \infty$ ist eine $(n-m)$-fache U-Stelle von $R(z)$. Dieser Wert U und die Punkte $u_1, u_2, \ldots, u_m$ werden *außergewöhnlich* genannt. Man hat $U = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, $U = \infty$ bzw. $U = 0$, je nachdem $\alpha_n \beta_n \neq 0$, $\beta_n = 0$, bzw. $\alpha_n = 0$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_m z^m, & f_1(z) &= \alpha_{m+1} z^{m+1} + \alpha_{m+2} z^{m+2} + \cdots + \alpha_n z^n, \\ g_0(z) &= \beta_0 + \beta_1 z \quad \cdots + \beta_m z^m, & g_1(z) &= \beta_{m+1} z^{m+1} + \beta_{m+2} z^{m+2} + \cdots + \beta_n z^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus der Definition von m folgt die Proportionalität

$$\alpha_{m+1} : \alpha_{m+2} : \cdots : \alpha_n = \beta_{m+1} : \beta_{m+2} : \cdots : \beta_n,$$

so daß $f_1(z)$ und $g_1(z)$ sich nur in einem konstanten Faktor unterscheiden. Deshalb ist

$$\begin{vmatrix} f' & f \\ g' & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_0' + f_1' & f_0 + f_1 \\ g_0' + g_1' & g_0 + g_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_0' & f_0 \\ g_0' & g_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_0' & f_1 \\ g_0' & g_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1' & f_0 \\ g_1' & g_0 \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt, daß die höchste Potenz von z im Polynom

(5) $$D(z)=f'(z)\,g(z)-g'(z)f(z)$$

den Exponenten $n+m-1$ und den Koeffizienten $(m-n)(\alpha_m\beta_n-\beta_m\alpha_n)\neq 0$ besitzt. Wir nennen $D(z)$ *das kritische Polynom* und seine Nullstellen *die kritischen Punkte von* $R(z)$. Die rationale Funktion $R(z)$ n-ten Grades und vom Index m hat also $n+m-1$ kritische Punkte (mit Vielfachheiten gerechnet).

Aus der Identität

(6) $$R'(z)=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}=\frac{D(z)}{g^2(z)}$$

folgt, daß jede endliche Nullstelle der Derivierten $R'(z)$ ein kritischer Punkt ist.

Ein kritischer Punkt z_0 der Funktion $R(z)$ ist nur dann keine Nullstelle der Derivierten $R'(z)$, wenn er ein mehrfacher Pol von $R(z)$ ist. Im Punkt z_0 verschwindet nämlich $R'(z)$ nur dann nicht, wenn $g(z_0)=0$ ist. Dann folgt aber aus der Gleichung $D(z_0)=f'(z_0)g(z_0)-g'(z_0)f(z_0)=0$, daß $g'(z)=0$ ist, weil beide Gleichungen $g(z_0)=0$ und $f(z_0)=0$ wegen der Irreduzibilität von $R(z)$ nicht bestehen können.

Ein kritischer Punkt der rationalen Funktion $R(z)$, der kein mehrfacher Pol von $R(z)$ ist, ist also eine Nullstelle der Derivierten $R'(z)$.

Der Punkt $z=\infty$ ist dann eine Nullstelle von $R'(z)$, wenn $D(z)$ einen kleineren Grad besitzt, als $g^2(z)$.

2. Die eingeführten Begriffe sind für eine Klasse der rationalen Funktionen charakteristisch im folgenden Sinne:

Sind a, b, c, d der Ungleichung $\Delta=ad-bc\neq 0$ genügende, sonst beliebige Zahlen, so hat jede rationale Funktion in der Schar

(7) $$S(z)\doteq\frac{aR(z)+b}{cR(z)+d}=\frac{af(z)+bg(z)}{cf(z)+dg(z)}=\frac{F(z)}{G(z)}$$

denselben Grad, denselben Index, dieselben außergewöhnlichen Punkte und dieselben kritischen Punkte. Die A-Stellen der Funktion $R(z)$ stimmen mit den $B=\dfrac{aA+b}{cA+d}$-Stellen der Funktion $S(z)$ überein.

Der Grad von $S(z)$ ist nicht kleiner als n, weil (wegen $\Delta\neq 0$) $a\alpha_n+{}$ ${}+b\beta_n$, $c\alpha_n+d\beta_n$ gleichzeitig nur dann verschwinden, wenn α_n und β_n beide verschwinden, was aber wegen $|\alpha_n|+|\beta_n|\neq 0$ nicht zutrifft.

Aus der Identität

$$\begin{vmatrix} a\alpha_k+b\beta_k & a\alpha_n+b\beta_n \\ c\alpha_k+d\beta_k & c\alpha_n+d\beta_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_k & \alpha_n \\ \beta_k & \beta_n \end{vmatrix}$$

folgt, daß die Funktionen $R(z)$ und $S(z)$ denselben Index haben.

Wegen der Identität $F'(z)G(z)-G'(z)F(z)=(ad-bc)D(z)$ stimmen die kritischen Punkte der Funktionen $R(z)$ und $S(z)$ überein. Die übrigen Behauptungen sind klar.

Sind $f(z)$ und $g(z)$ beliebige teilerfremde Polynome, a und b ($|a|+|b|\neq 0$) beliebige Zahlen, so gibt es unter den Gradzahlen der Polynome $af(z)+bg(z)$ offenbar zwei und nur zwei verschiedene. Die größere ist der Grad, die kleinere ist der Index der rationalen Funktion $R(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$.

3. Die Gleichung (6) läßt sich auch in der Form

$$\frac{R'(z)}{R(z)}=\frac{D(z)}{f(z)g(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{8}$$

schreiben. Für beliebige Konstanten A und B ($\neq A$) ergibt sich die Identität

$$\frac{f'(z)-Ag'(z)}{f(z)-Ag(z)}-\frac{f'(z)-Bg'(z)}{f(z)-Bg(z)}=\frac{(A-B)D(z)}{[f(z)-Ag(z)][f(z)-Bg(z)]}. \tag{9}$$

Die Lage der Nullstellen der Derivierten einer gebrochenen rationalen Funktion oder die Lage der kritischen Punkte wurde in der Literatur[1]) fast ausschließlich in bezug auf die Nullstellen und Pole der Funktion untersucht. In dieser Arbeit wird auf Grund der Gleichung (9) gezeigt, daß diese zwei Punktgruppen sich durch die Punktgruppen der A-Stellen und B-Stellen ($B\neq A$) ersetzen lassen. Dabei wird sich auch die Rolle der Gruppe der außergewöhnlichen Punkte erhellen.

Ist z_0 ein kritischer Punkt der Funktion (1) und ist $R(z_0)=C$, so ist z_0 eine mindestens zweifache C-Stelle von $R(z)$, weil im Punkt z_0 die Funktion $R(z)-C$ und ihre Derivierte verschwinden. Sind

$$h_a(z)=f(z)-Ag(z)\equiv\alpha\prod_{k=1}^{n}(z-a_k),$$

$$h_b(z)=f(z)-Bg(z)\equiv\beta\prod_{k=1}^{n}(z-b_k),\qquad h_u(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-u_k)$$

und bezeichnet z_0 einen kritischen Punkt, der von den mehrfachen Nullstellen der Polynome $h_a(z)$ und $h_b(z)$ bzw. $h_a(z)$ und $h_u(z)$ verschieden ist, so erhält man aus (9) die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-b_k}=0 \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_0-u_k}=0. \tag{10}$$

Daraus folgt die folgende Form eines Satzes von WALSH[2]):

[1]) Vgl. J. DIEUDONNÉ, La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques), *Mémorial des Sciences Math.*, Fasc. **93** (1938), S. 48—56; M. MARDEN, *The geometry of the zeros of polynomial in a complex veriable* (New York, 1949), S. 67—82; L. J. WALSH, *The location of critical points of analytic and harmonic functions* (New York, 1950), S. 89—216.

[2]) J. L. WALSH, On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivative of a rational function, *Transactions American Math. Soc.*, **19** (1918), S. 291—298.

Ein von den mehrfachen A- und B-Stellen verschiedener kritischer Punkt der rationalen Funktion $R(z)$ ist eine Gleichgewichtslage eines materiellen Punktes der Ebene, auf den die A- bzw. B-Stellen dem Abstand umgekehrt proportionale abstoßende bzw. anziehende Kräfte ausüben. Dies gilt auch dann, wenn B durch den außergewöhnlichen Wert U von $R(z)$ ersetzt wird.

Hat nähmlich die Summe dieser Kräfte in der Richtung der reellen bzw. imaginären Achse die Komponente X bzw. Y, so ist der reelle bzw. imaginäre Teil der Gleichung (10) zu X bzw. Y proportional.

4. Bezeichnen a_k^*, b_k^*, u_k^* die Spiegelbilder der Punkt a_k, b_k, u_k in bezug auf den Punkt z_0, ist also $a_k^*-z_0=-(a_k-z_0)$, $b_k^*-z_0=-(b_k-z_0)$, $u_k^*-z=-(u_k-z_0)$, so nimmt (10) die Form an:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-b_k^*}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k^*}+\sum\frac{1}{z_0-b_k}=0,$$

$$\text{bzw.}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_0-u_k^*}=0.$$

Sind

$$h_a^*(z)=\alpha\prod_{k=1}^{n}(z-a_k^*),\ h_b^*(z)=\beta\prod_{k=1}^{n}(z-b_k^*)\ \text{ und }\ h_u^*(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-u_k),$$ so ist z_0

eine Nullstelle der Derivierten der Polynome $h_a(z)\,h_b^*(z)$, $h_a^*(z)\,h_b(z)$, $h_a(z)\,h_u^*(z)$, $h_a^*(z)\,h_u(z)$. Nach dem Satz von GAUSS und LUCAS liegt z_0 in der konvexen Hülle der Nullstellen jedes Polynoms. Es gibt also durch z_0 keine Gerade, von der die Punktgruppen der A-Stellen und B-Stellen oder diejenigen der A- und U-Stellen getrennt wären.

5. Der Polarpunkt ζ_0 eines Punktes z_0 der komplexen Ebene bezüglich der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wird bekanntlich durch die Gleichung

$$\frac{n}{z_0-\zeta_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-a_k} \tag{11}$$

definiert. Auf Grund der ersten Gleichung von (10) ist der Polarpunkt eines kritischen Punktes z_0 der rationalen Funktion $R(z)$ bezüglich ihrer A-Stellen derselbe, wie bezüglich ihrer B-Stellen, wenn z_0 keine A- oder B-Stelle ist und wenn $A \neq U$ und $B \neq U$ sind. Der Polarpunkt z_0 bezüglich der U-Stellen bleibt nur dann derselbe, wenn man den außergewöhnlichen Punkten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ den Punkt $z=\infty$ $(n-m)$-fach hinzurechnet.

Nach einem LAGUERREschen Satz werden die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von jedem Kreis durch das Punktpaar z_0 und ζ_0 getrennt. Daraus folgt der Satz:

Sind A und B keine außergewöhnlichen Werte einer rationalen Funktion $R(z)$ und enthält der Kreisbereich K_1 bzw. K_2 die A- bzw. B-Stellen von $R(z)$, so besitzt $R(z)$ außerhalb beider Kreisbereiche keinen kritischen Punkt. Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam und hat $R(z)$ den Grad n und den Index $n-1$, so enthalten beide Bereiche je $n-1$ kritische Punkte.

Für den Polarpunkt ζ_a bzw. ζ_b des kritischen Punktes z_0 bezüglich der A-bzw. B-Stellen nach (10) gilt $\zeta_a = \zeta_b$. Diese Gleichheit kann aber nicht bestehen, wenn z_0 außerhalb beider Bereiche K_1 und K_2 liegt, weil dann ζ_a zu K_1, ζ_b zu K_2 gehört.

Die kritischen Punkte der Funktionen $R(z)$ und

$$S(z) == \frac{R(z)-A}{R(z)-B} = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{z-b_k}$$

stimmen überein. Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam und verändern sich die Punkte a_k in K_1 und die Punkte b_k in K_2 stetig, so verändern sich die zugehörigen kritischen Punkte stetig uud kein kritischer Punkt kann den Rand von K_1 oder K_2 überschreiten. Widrigenfalls gäbe es eine rationale Funktion, die einen kritischen Punkt außerhalb beider Bereiche K_1 und K_2 besitzt. Bei der Veränderung der Punkte a_k und b_k in K_1 bzw. K_2 hat also die zugehörige Funktion in K_1 bzw. in K_2 ebensoviel kritische Punkte, wie die Funktion $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$, wo a bzw. b ein beliebiger Punkt von K_1 bzw. K_2 ist. Diese Funktion hat in K_1 und K_2 je $n-1$ kritische Punkte, weil sie das kritische Polynom

$$D(z) = (b-a)(z-a)^{n-1}(z-b)^{n-1}$$

besitzt.

Es gilt die folgende Form eines Satzes von WALSH[3]):

Enthält der Kreisbereich K_1 bzw. K_2 jede A-Stelle bzw. jeden außergewöhnlichen Punkt einer rationalen Funktion $R(z)$ n-ten Grades und vom Index m, so fällt jeder kritische Punkt von $R(z)$ in mindestens einen der Bereiche

$$K_1, \; K_2, \; K_3 = \frac{nK_2 - mK_1}{n-m}.$$

Der Bereich K_3 besteht aus den Punkten $z_3 = \dfrac{nz_2 - mz_1}{n-m}$, wenn z_1 bzw. z_2 ein beliebiger Punkt von K_1 bzw. K_2 ist. Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam, so enthält K_1, K_2 bzw. K_3 $n-1$, $m-1$ bzw. 1 kritische Punkte.

Für den Polarpunkt ζ_1 bzw. ζ_2 eines kritischen Punktes z_0 bezüglich der A-Stellen bzw. der endlichen U-Stellen erhält man aus (10) die Gleichungen

$$\frac{n}{z_0-\zeta_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_0-a_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{z_0-u_k} = \frac{m}{z_0-\zeta_2}, \; z_0 = \frac{n\zeta_2 - m\zeta_1}{n-m}.$$

Liegt z_0 außerhalb beider Bereiche K_1 und K_2, so gehört ζ_1 zu K_1, ζ_2 zu K_2. Folglich ist z_0 ein Punkt von K_3.

[3]) J. L. WALSH, On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms and of the derivative of a rational function, *Transactions American Math. Soc.*, **22** (1921), S. 101–116. Vgl. das Buch von WALSH, Fußnote[1]), S. 104.

Haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemeinsam, so haben auch K_1 und K_3, sowie K_2 und K_3 keinen Punkt gemeinsam. Dies folgt aus der Gleichung von z_3. Verändern sich die Punkte a_k in K_1 und die Punkte u_k in K_2 stetig, so verändern sich die kritischen Punkte stetig, ohne den Rand von K_1, K_2 und K_3 zu überschreiten. $R(z)$ hat deshalb in K_1, K_2 bzw. K_3 ebensoviel kritische Punkte, wie $\dfrac{(z-a)^n}{(z-u)^m}$ wo a bzw. u einen beliebigen Punkt von K_1 bzw. K_2 bezeichnet. Für diese Funktion ist $D(z)=(n-m)(z-a)^{n-1}(z-u)^{m-1}\left(z-\dfrac{nu-ma}{n-m}\right)$. Damit ist der Satz bewiesen.

6. Ein Satz von J. Dieudonné[4]) gilt auch in der Form:

Enthält ein Kreisbereich K jede A-Stelle ($A \neq U$) einer rationalen Funktion $R(z)$, so enthält er mindestens einen kritischen Punkt.

Eine mehrfache A-Stelle ist auch ein kritischer Punkt. Man kann also annehmen, daß die A-Stellen, also die Nullstellen des Polynoms $f(z)-Ag(z) \equiv \equiv h(z)$ einfach sind.

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ($\nu = n+m-1$) die kritischen Punkte und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die A-Stellen der Funktion $R(z)$ n-ten Grades und vom Index m, so hat man

$$D(z)=f'(z)g(z)-g'(z)f(z)\equiv h'(z)g(z)-g'(z)h(z),$$

$$\frac{D'(z)}{D(z)}=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{z-z_k}=\frac{h''(z)\,g(z)-g''(z)\,h(z)}{h'(z)\,g(z)-g'(z)\,h(z)}.$$

Der Polarpunkt ζ_p des Punktes a_p bezüglich der kritischen Punkte genügt der Gleichung

$$Z_p \equiv \frac{\nu}{a_p-\zeta_p}=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{a_p-z_k}=\frac{D'(a_p)}{D(a_p)}=\frac{h''(a_p)}{h'(a_p)}.$$

Die Zahlen $Z_p (p=1, 2, \ldots, n)$ sind Residua der rationalen Funktion

$$H(z)=\frac{h''(z)}{h(z)};$$

ihre Summe verschwindet, weil $z=\infty$ kein Pol von $R(z)$ ist.

Zum Beweis des Satzes können wir annehmen, daß K die obere Halbebene ist, weil dies durch eine lineare Transformation erreicht werden kann. Wäre dann der Satz unrichtig, so wäre jeder kritische Punkt im Innern der unteren Halbebene gelegen. Dann wären auch die Polarpunkte ζ_p unterhalb der rellen Achse gelegen, weil die kritischen Punkte von jedem Kreis durch das Punktpaar a_p und $\zeta_p (p=1, 2, \ldots, n)$ getrennt werden. Deshalb hätten die Zahlen ζ_p und Z_p negative Imaginärteile. Die Summe der Residua von

[4]) J. Dieudonné, Sur quelques points de la théorie des zéros des polynomes, *Bulletin des Sciences Math.*, (2) 58 (1934), S. 273—296.

$R(z)$ kann also nicht verschwinden. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

Daraus erhält man im Falle $n = 2$ bzw. $n = 3$:

Jede rationale Funktion zweiten Grades, die in den Punkten a_1 *und* $a_2 (\neq a_1)$ *denselben Wert annimmt, hat im Kreis mit dem Durchmesser* (a_1, a_2) *mindestens einen kritischen Punkt.*

Jede rationale Funktion dritten Grades, die in den Punkten a_1, a_2, a_3 *denselben Wert besitzt, hat im Umkreis des Dreiecks mit den Eckpunkten* a_1, a_2, a_3 *mindestens einen kritischen Punkt.*

(Eingegangen am 21. Oktober 1951.)