Bibliographie.

Rózsa Péter, Rekursive Funktionen, 206 Seiten und eine Tabelle, Budapest, Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag), 1951.

Eine arithmetische Funktion, d. h. eine Funktion einer oder mehrerer nichtnegativen ganzen Zahlen, deren Werte ebenfalls nichtnegative ganze Zahlen sind, nennt man *rekursiv,* falls sie von der Konstanten 0 und der Funktion $x+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen (d. h. Bildung einer Funktion von Funktionen) und Rekursionen gewinnen läßt. Dabei kann man den Begriff der Rekursion auf verschiedene Weisen abgrenzen; so entstehen verschiedene Klassen von rekursiven Funktionen. Die einfachste solche Klasse ist die der *primitiv-rekursiven Funktionen;* diese Klasse entsteht, falls man unter Rekursion die Bildung einer Funktion $\varphi(n, x, y, \ldots)$ aus bereits bekannten Funktionen $\alpha(x, y, \ldots)$ und $\beta(n, x, y, \ldots, m)$ mittels der Definition (primitive Rekursion)

$$\varphi(0, x, y, \ldots) = \alpha(x, y, \ldots),$$
$$\varphi(n+1, x, y, \ldots) = \beta(n, x, y, \ldots, \varphi(n, x, y, \ldots))$$

versteht. Einige mögliche Verallgemeinerungen: auf der rechten Seite der zweiten Gleichung können statt $\varphi(n, x, y, \ldots)$ mehrere Werte der Funktion φ stehen, wobei der erste Argument stets kleiner als $n+1$ ist *(Wertverlaufsrekursion);* oder solche Werte der Funktion φ, in welchen statt $x, y, \ldots$ beliebige bereits bekannte Funktionen von $n, x, y, \ldots$ und sogar auch von weiteren solchen Werten von φ stehen, deren erste Argument stets gleich n ist, die übrigen können wiederum Werte von φ (aber mit der gleichen Einschränkung) enthalten usw. *(eingeschachtelte Rekursion);* statt φ können mehrere Funktionen gleichzeitig durch eine Rekursion definiert werden *(simultane Rekursion);* statt n kann die Rekursion nach mehreren Variablen laufen *(mehrfache Rekursion);* statt Verminderung des ersten Arguments $n+1$ auf n kann die Funktion φ für eine beliebige Argumentfolge mittels ihres Wertes für eine frühere Argumentfolge bei einer gewissen Wohlordnung aller Argumentfolgen definiert werden *(transfinite Rekursion).* In die rekursive Definition von φ können auch solche Funktionen eingehen, deren gewisse Argumente nicht die nichtnegativen ganzen Zahlen, sondern die arithmetischen Funktionen, oder sogar Funktionen von variablen arithmetischen Funktionen usw. durchlaufen, und die selbst wiederum durch eine Rekursion (selbstverständlich nach einem ihrer Zahlenargumenten) definiert werden *(Rekursion höherer Stufe).* Alle diese Verallgemeinerungen, und auch ihre Kombinationen, sind Spezialfälle der *allgemeinen Rekursion,* worunter man die Definition einer Funktion durch ein Gleichungssystem versteht, welches es ermöglicht, den Wert der zu definierenden Funktion an einer beliebig numerisch gegebenen Stelle mittels genau zu definierenden Substitutionsoperationen in endlich vielen Schritten eindeutig zu bestimmen.

Rekursionen verschiedener Art wurden seit langem zur Definition von speziellen arithmetischen Funktionen oder Zahlenfolgen verwendet. Ihre Bedeutung ist aber viel größer:

die rekursive Funktionen sind wichtige Hilfsmittel verschiedener Untersuchungen, insbesondere in der mathematischen Logik. Sie wurden z. B. durch DEDEKIND und PEANO zu einer axiomatischen Aufbau der Arithmetik verwendet; durch SKOLEM zur Elimination der Begriffe „alle" und „es gibt" aus gewissen arithmetischen Definitionen und Beweisführungen; durch HILBERT zu einem Ansatz zum Beweis der Cantorschen Vermutung, oder wenigstens ihrer Unwiderlegbarkeit (die später von GÖDEL in einer wesentlich veränderter Form durchgeführt wurde); durch GÖDEL zum Beweis seines berühmten Satzes über innerhalb eines gegebenen Axiomensystems unentscheidbare Probleme; durch KLEENE zur Präzisierung des Begriffes eines endlichen Prozesses; durch ACKERMANN zu einem Beweis der Widerspuchsfreiheit der Arithmetik; durch SPECKER und GOODSTEIN zu einer konstruktiven Verschärfung gewisser Begriffe der Analysis usw. In diesen Untersuchungen wurden verschiedene Klassen rekursiver Funktionen verwendet und oft spielt die Klarstellung der Beziehung zwischen solchen Klassen eine entscheidende Rolle. In dieser Hinsicht hat die Verfasserin des vorliegenden Buches große Verdienste geleistet. Daher begrüßt man mit Freude, daß die erste Monographie der Theorie der rekursiven Funktionen von ihrem Feder stammt.

Nach Angabe von rekursiven Definitionen einiger für die Zahlentheorie, Kombinatorik, Analysis und Mengenlehre wichtigen arithmetischen Funktionen werden im vorliegenden Buche unter anderen die oben geschilderten Klassen von rekursiven Funktionen definiert und ihre Beziehungen in hohem Maße klargestellt. Insbesondere wird es gezeigt, welche von jenen Klassen identisch sind, welche Rekursionsarten von der einer oder anderen Klasse hinausführen und auf welche einfachste Normalformen lassen sich die Definitionen einer beliebigen Funktion der einzelnen Klassen zurückführen. Auch auf eine Untersuchung von I. BERECZKI betreffend der Beziehung zwischen der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen und einer spezielleren Funktionsklasse, die der sogenannten elementaren Funktionen (die in mehreren Anwendungen die rekursiven Funktionen ersetzen können), wird eingegangen. Besonders ausführlich wird über die Untersuchungen von KLEENE, SKOLEM und MARKOV über die Möglichkeit einer Darstellung aller allgemein-rekursiven Funktionen durch primitiv-rekursive, mittels des Begriffes der kleinsten Zahl die einer gewissen Bedingung genügt, berichtet. Ein besonderer Paragraph wird der Geschichte und den Anwendungen der rekursiven Funktionen gewidmet; jedoch werden die Anwendungen auf gewisse Unentscheidbarkeitsfragen in zwei weiteren Paragraphen und die auf Konstruktivitätsfragen in der Analysis in einer weiteren Paragraphen behandelt.

Das Buch ist ein vorzügliches Nachschlagewerk für den Spezialisten der Theorie der rekursiven Funktionen und der mathematischen Logik. Die Zielsetzung der Verf. geht aber darüber hinaus. Sie will offenbar neue Freunde für die Theorie der rekursiven Funktionen erwerben. Diesem Zweck dient in erster Linie die Herabsetzung des Anspruches an Vorkenntnissen. Von der mathematischen Logik wird überhaupt nichts vorausgesetzt und auch aus der elementaren Zahlentheorie, Analysis und Mengenlehre nur sehr weniges. Dem gleichen Zweck dient auch die Behandlungsweise: statt formaler Durchführung komplizierter allgemeiner Beweisen werden an typischen Spezialfällen die Methoden gezeigt, die auch im allgemeinen Fall zum Ziele führen. Auf Grund derselben kann den allgemeinen Beweis der Leser selbst — allerdings eine gewisse logische Schulung vorausgesetzt — rekonstruieren, wenn er will.

Das treffliche Buch hätte wohl eine schönere typographische Ausstattung und eine gründlichere Korrektur von sprachlichen und Druckfehlern verdient.

L. Kalmár.

Szász Pál, A differenciál- és integrálszámítás elemei. Teljesen átdolgozott és lényegesen bővített második kiadás FEJÉR LIPÓT előszavával, két kötet, XVI+703+VIII+606 oldal, Budapest, Közoktatásügyi kiadóvállalat, 1951.

Pál Szász, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zweite, völlig neubearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage, mit einem Vorworte von LEOPOLD FEJÉR, zwei Bänder, XVI+703+VIII+606 Seiten, Budapest, Verlag für öffentlichen Unterricht, 1951.

Die in 1935 erschienene erste Auflage des Lehrbuchs von P. SZÁSZ (besprochen in *diesen Acta,* Bd. 8 (1936/37), S. 68—69) hat sich zum Unterricht in den ungarischen Hochschulen wohl bewährt, so daß sie schon vor dem Kriege vergriffen war. Diese zweite Auflage wurde durch jahrelang dauernde Arbeit des Verfassers bis in die Einzelheiten vollkommen neugeschrieben, so daß man von einem neuen Buch sprechen kann.

Durch Hinzunahme neuer Kapitel wurde der Inhalt des Buches in solchem Maße erweitert, daß er die üblichen Rahmen der Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung und auch die der meisten Lehrbücher nicht nur erreicht, sondern von vielen Standpunkten aus wesentlich überschreitet. Zu erwähnen sind in dieser Hinsicht die Aufnahme des Jordanschen Inhalts und der mehrfachen (Riemannschen) Integrale, die in der ersten Auflage noch nicht behandelt wurden, und das Kapitel über komplexe Funktionentheorie, das fast alles enthält, das man in Spezialvorlesungen über dieses Gebiet vorzulesen pflegt. Neben dem Kapitel über Fouriersche Reihen wurden die Elemente der Theorie der allgemeinen trigonometrischen Reihen (mit den Sätzen von RIEMANN, CANTOR, DU BOIS-REYMOND) aufgenommen. Ganz besonderes Interesse verdienen aber die Kapitel über *rationale und trigonometrische Polynome, Interpolation, orthogonale Polynomfolgen und Interpolationsfolgen,* in welchen eine Reihe neuester Ergebnisse der von L. FEJÉR gegründeten ungarischen mathematischen Schule — teilweise zum ersten Male — bearbeitet wird. Wir erwähnen nur neben zahlreichen Ergebnissen von L. FEJÉR die Sätze von J. EGERVÁRY, P. ERDŐS, G. GRÜNWALD, A. HAAR, M. RIESZ, G. SZEGŐ und P. TURÁN.

Das charakteristische Merkmal der ersten Auflage, daß die Behandlung der allgemeinen Theorie durch völlig ausgearbeitete Beispiele, Spezialfälle und Aufgaben illustriert und unterstützt wird, bleibt hier unverändert. Dabei wurde der streng logische Aufbau der Grundlagen durch Umarbeitung der einleitenden Kapitel noch mehr hervorgehoben. Viele methodische Änderungen — unter anderen die Einführung der irrationalen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche — erzielen die Erleichterung des Verständnisses.

Sowohl die Auswahl des Stoffes, als die Art der Behandlung verleihen auch dieser zweiten Auflage ein eigenartiges Gepräge. Durch diesen Umstand wird die Äußerung von L. FEJÉR im Vorwort dieser Auflage begründet: „Ich bin überzeugt, daß auch diese neue Auflage der Arbeit von P. SZÁSZ in jedem Lande eine freundliche Annahme finden würde."

Ákos Császár

A. J. Chintschin, Drei Perlen der Zahlentheorie, 62 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1951.

Deutsche Übersetzung der in *diesen Acta* [Bd. 11 (1948), S. 256] schon besprochenen russischen Originalausgabe. Die Übersetzung erfolgte auf Grund deren 2. Auflage (1948), in der der Beweis des Satzes von VAN DER WAERDEN (Kapitel I) durch einen von M. A. LUKOMSKAJA gefundenen, einfacheren Beweis ersetzt wurde.

Die Ausstattung des Büchleins ist hervorragend.

B. Sz.-N.

Paul Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. PELLEGRINO, XIV+484 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

Cet ouvrage constitue une nouvelle édition des "Leçons d'analyse fonctionnelle" du même auteur, publiées en 1922.

Dans la première partie, ont été supprimées les théories maintenant classiques relatives à la théorie de la mesure et aux équations intégrales. Elle est consacrée à l'étude des notions relatives aux variations de différents ordres des fonctionnelles et aux dérivées fonctionnelles.

La deuxième partie (équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre) a subi peu de changements. La terminologie a été rendue plus conforme à la terminologie moderne.

La troisième partie a subi des modifications importantes. Le but en est d'étendre la notion de moyenne et l'équation de Laplace à l'espace hilbertien H et à l'espace L_2 des fonctions de carré sommable sur le segment $[-1, +1]$. L'auteur commence par mettre l'accent sur la difficulté que présente la définition du volume dans ces espaces, le nombre infini des dimensions entraînant de singuliers phénomènes de "concentration". La définition de la moyenne semble plus satisfaisante et plus maniable. Cependant deux difficultés essentielles se présentent. D'une part la moyenne définie comme limite par un procédé de passage du fini à l'infini, n'existe pas toujours. D'autre part la définition de la moyenne est toujours liée à un certain mode d'approximation se présentant naturellement mais n'ayant pas de caractère intrinsèque du point de vue abstrait. C'est ainsi que dans H, rapporté à une base orthonormale donnée à priori, on peut donner un mode d'approximation par les sous-espaces sous-tendus par les n premiers vecteurs de la base, tandis que dans L_2 on peut utiliser certains sous-espaces formés de fonctions "en escalier". La première difficulté conduit à remplacer la moyenne par une suite de moyennes successives. La deuxième difficulté conduit à examiner dans quelles conditions les deux définitions de la moyenne s'identifient quand on établit un isomorphisme de L_2 sur H à l'aide d'une suite complète de fonctions orthonormales.

La suite de la troisième partie est consacrée à l'étude de l'équation de Laplace et du problème de Dirichlet.

L'ouvrage se termine par une importante note de F. PELLEGRINO sur les fonctionnelles analytiques au sens de L. FANTAPPIÈ. Le domaine de définition des ces fonctionnelles est formé de fonctions localement analytiques par lesquelles L. FANTAPPIÈ a récemment remplacé les fonctions analytiques. Un aperçu est donné sur les applications de la théorie, en particulier au calcul symbolique et à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

R. Pallu de la Barrière (Paris).

A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, Coefficient regions for schlicht functions (American Math. Society Colloquium Publications, Vol. XXXV), XVI+311 pages, New York, American Math. Society, 1950.

The first important result for the class of schlicht functions was KOEBE's "area-principle". This has been the starting point to a wide class of further investigations. The following well-known result is also a consequence of the area-principle.

Let S be the class of schlicht functions which are regular in the circle $|z| < 1$ and normalized in the form $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$. Then for all functions of class S we have $|a_2| \leqq 2$. Generalizing this result, BIEBERBACH conjectured in 1916 that $|a_n| \leqq n$ holds for every n. Up to now this problem has been solved only for special classes of functions in S, e. g. for functions with real coefficients, or for functions mapping the circle $|z| < 1$ onto a convex or a starshaped region. For every $f(z)$ in S only $|a_n| < en$ is proved. For the whole class S the first further precise result is due to LÖWNER who has proved the conjecture for the case $n=3$. He elaborated for the proof a significant variational method which has been applied with succes to several questions.

A more general form of BIEBERBACH's problem is to determine the precise region V_n in euclidean space of $2n-2$ real dimension occupied by the real and imaginary parts of the coefficients $a_2, a_3, \ldots, a_n$ of the functions of S. The authors' aim is to investigate and to determine this region.

The present work is based on their own variational method which passes through the whole work. This method may be considered as a continuation of LÖWNER's method and of some earlier works of the authors. Perhaps the most essential feature of this method is the introduction of a suitable and fruitful neighborhood concept for functions of S. This makes possible to investigate the functions whose coefficients are on the boundary of V_n, i.e. to investigate the region V_n itself. In fact, they show that every function corresponding to a boundary point of V_n satisfies a differential equation of the form

$$\left(\frac{z}{w}\frac{dw}{dz}\right)^2 P(w) = Q(z), \tag{A}$$

where $P(w) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{w^\nu}$, $Q(z) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} \frac{p_\nu}{z^\nu}$, $Q(z) \geqq 0$ on $|z|=1$ and has at least one zero of even order on $|z|=1$. Hence the problem is reduced to the discussion of a differential equation of type (A). This is realized partly by investigating the behaviour and structure of the loci determined by $\mathrm{Re}\int [P(w)]^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{w}$. By making use of a method of TEICHMÜLLER, the authors show that any function satisfying (A) (with some additional conditions implied by the normalisation of $f(z)$) belongs to a boundary point of V_n. If is also proved that to any boundary point of V_n there corresponds only one function $f(z)$ of class S, while at least two such functions correspond to every interior point of V_n; it is also shown that there is no one-to-one correspondence between the normalized functions $f(z)$ and the differential equations of type (A). As a consequence of this method they obtain LÖWNER's integral representation of the coefficients.

The principal result of this method is the complete determination of the region V_3. They show in general that the boundary of V_n may be expressed in terms of finitely many parameters. In case $n=3$ the parametric equations are obtained in terms of elementary functions. So they get that the boundary of V_3 is composed of two hypersurfaces of dimension 3 and of their intersections. In an Appendix there are given tables for the boundary of V_3. The book contains also two very illustrative figures for the egion (a_2, a_3) when a_2 or a_3 is real. The last chapter is devoted to the investigation of the case $n=4$, to make a progress towards proving $|a_n| \leqq 4$.

An additional chapter written by A. GRAD applies the above method to determining the region of values of $f'(z)$, proving thereby that this powerful method is applicable with success to other problems too.

V. Sós (Budapest).

Maurice Roy, Mécanique des milieux continus et déformables, Tome I: XXII+366 pages, Tome II: XII+338 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1950.

Cet ouvrage constitue en substance le cours de l'auteur à l'Ecole Polytechnique. Il s'adresse principalement aux élèves ingénieurs et aux ingénieurs en exercice.

La Mécanique des milieux continus et déformables a fait des progrès considérables depuis quelques dizaines d'années et est devenue, par ses nombreuses applications, une discipline de base dans les connaissances de l'ingénieur. Cependant l'exposition de cette science pose des problèmes delicats. Si on la considère comme un prolongement de la

Mécanique Rationnelle, on aboutit à des difficultés fondamentales, par exemple pour une définition convenable du travail des forces intérieures. A vouloir annexer cette discipline et à vouloir la convertir à un formalisme étroit, les Mathématiques vont à l'encontre du but poursuivi. La rigueur disparaît et l'arbitraire risque de régner en maître. Si on considère au contraire la Mécanique des milieux continus et déformables comme une science expérimentale, la compréhension des phénomènes risque de passer au second plan devant l'empirisme.

L'auteur apporte à cette situation paradoxale une solution didactique satisfaisante en basant tout l'édifice sur les principes de la Thermodynamique. Celle-ci permet de construire la théorie sur des bases logiques solides tout en apportant une interprétation élargie des phénomènes physiques. Les théories mathématiques modernes s'intègrent d'une façon harmonieuse et si l'auteur ne fait appel qu'aux plus connues d'entre elles, c'est pour ne pas exiger du lecteur des connaissances mathématiques trop étendues.

R. Pallu de la Barrière (Paris).

A. Maroger, Les trois étapes du problème Pythagore—Fermat. La récurrence. L'art des réciproques, XII+98 pages, Paris, Vuibert, 1951.

La première partie du livre s'occupe des triades pythagoréennes et donne plusieurs méthodes de construire, en partant d'un entier x donné, des entiers y, z, solutions de l'équation $x^2+y^2=z^2$. On montre que ces methodes ne s'appliquent pas à l'équation $x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$. Le reste du livre étudie, de point de vue logique, la métrode de l'induction mathématique et "l'art" des théorèmes réciproques; parmi les exemples mentionnés il y a plusieurs intéressants.

G. Szász (Szeged).

George David Birkhoff, Collected Mathematical Papers, Vol. 1: XI+754 pages, Vol. 2: VII+983 pages, Vol. 3: VII+897 pages, New York, American Math. Society, 1951.

The late G. D. BIRKHOFF, one of the great mathematicians of the first half of this century, published his research papers widely in journals in all parts of the word. The American Mathematical Society has now published, in three volumes, the photolithoprint reproductions of all his mathematical works except his books.

The papers are grouped in the following seven categories: 1. boundary value and associated Sturmian problems, 2. differential equations, 3. difference equations, 4. dynamics, 5. physical theories, 6. the four color problem, 7. miscellaneous. There are added three photographs of BIRKHOFF at different ages; biographical sketches by OSWALD VEBLEN and R. E. LANGER; a critical sketch by MARSTON MORSE; a list of the doctor dissertations made under BIRKHOFF's direction; biographical material; a complete list of BIRKHOFF's works in chronological order.

B. Sz.-N.

Pierre Dive, Ondes ellipsoïdales et relativité, VIII+138 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

L'auteur reprend l'hypothèse de Poincaré sur l'anisothropie de l'éther, par laquelle on s'efforçait d'interpréter, avant la théorie de la relativité, les problèmes relatifs à l'expériment de Michelson et à la propagation de la lumière, pour éviter ainsi les difficultés d'ordre philosophique découlant de la contraction de Lorentz. La formulation mathématique du problème offre une application intéressante des méthodes de la géométrie moderne, cependant il nous semble que les arguments que l'auteur pose en faveur de la théorie considérée et qu'il oppose à la théorie relativiste, ne sont pas assez convaincants.

J. I. Horváth (Debrecen).