Zur Theorie der einfachen Gruppen.

Von J. Szép in Szeged.

Wir beweisen den folgenden

S a t z. *Ist die Gruppe $G = HP$ einfach, wo H und P eigentliche Untergruppen von G sind mit $H \cap P = 1$, und ist die Ordnung von P eine Primzahl p, so hat G eine Ordnung $pd(1+kp)$ mit $d|p-1$, $d>1$ (k eine natürliche Zahl).*

K o r o l l a r. *Ist p eine Primzahl von der Form 2^n+1, so ist die Ordnung von G eine gerade Zahl. (Ein ganz spezieller Fall der Burnsideschen Vermutung.)*

B e m e r k u n g. Es gibt unendlich viele Gruppen für die die Bedingungen des Satzes erfüllt sind.[1])

B e w e i s d e s S a t z e s. Zuerst werden wir zeigen, daß H ein Element a hat, für welches $aPa^{-1} = P$ gilt. Die Gruppen $xPx^{-1} (x \in H)$ sind nicht sämtlich verschieden, da sonst G nichteinfach wäre[2]). Die Elemente $a (\in H)$ mit $aPa^{-1} = P$ bilden eine Gruppe $H' \subset H$ $(H' \neq 1)$. Die Automorphismen $x \to axa^{-1} (a \in H', x \in P)$ sind sämtlich verschieden. Wären nämlich die Automorphismen $x \to axa^{-1}$, $x \to bxb^{-1} (a \neq b)$ gleich, so wäre der Automorphismus $x \to a^{-1}bx(a^{-1}b)^{-1}$ die Identität und dann wäre die Gruppe G nichteinfach[3]). Nun bilden die Automorphismen $x \to axa^{-1}$ eine Gruppe $\mathfrak{A} \cong H'$, also ist $p-1$ (die Ordnung der Automorphismengruppe von P) teilbar durch die Ordnung von H'.

Wir betrachten die Zerlegung von G nach dem Doppelmodul (P, P):

$$G = PP + PuP + PvP + \cdots \qquad (u, v \in H).$$

Der Index von P in G ist $h = d + k'p$, wobei d die Ordnung von H' bezeichnet. Andererseits kann die Ordnung h von H durch p nicht teilbar sein[1]), folglich gilt wegen $d|h$ auch $d|k'$, somit gilt $h = d(1+kp)$. Nach obigem gilt auch $d|p-1, d>1$. Somit haben wir den Satz bewiesen.

(Eingegangen am 4. September 1952.)

---

[1]) J. Szép, On simple groups, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 98.

[2]) A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, zweite Aufl. (Berlin, 1927), Satz 176.

[3]) J. Szép, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), S. 31—33, Satz 1.