Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Eine Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, d. h. durch Anwendung der *hyperbolischen Parallelen* und des *Grenzkreises*, ist zum ersten Male H. LIEBMANN[1]) geglückt. Diese Liebmannsche Herleitung wurde von uns[2]) vereinfacht. Bei dieser Vereinfachung spielte die klassische Konfiguration von J. BOLYAI[3]) zur Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes, eine entscheidende Rolle.

In vorliegender Note wird die Bestimmung des Parallelwinkels in noch viel einfacherer Weise durchgeführt. Wir machen nämlich von der Gleichung des Grenzkreises und von der *Streckentrigonometrie* kein Gebrauch mehr. Benützt wird nur der bekannte Satz, laut welchem für zwei konzentrische Grenzkreisbogen $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$ zwischen denselben Achsen AA', BB', und mit dem Abstand $\overline{AA'} = \overline{BB'} = x$, das Verhältnis

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e^{\frac{x}{k}}$$

ausfällt, wobei k eine konstante Strecke, die *natürliche Längeneinheit* bedeutet. Mit der Bestimmung des Parallelwinkels ist schon im wesentlichen die ganze hyperbolische Trigonometrie gewonnen, da aus der klassischen Formel (10) die bekannten Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck folgen. Das erhellt aus einem eleganten Gedankengang von. J. HJELMSLEV.[4])

[1]) H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse*, **59** (1907), S. 187—210.

[2]) PAUL SZÁSZ, Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, *diese Acta*, **14** (1952), S. 174—178.

[3]) J. BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 29; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen*, II (Leipzig und Berlin, 1913), S. 197.

[4]) J. HJELMSLEV, *Grundlag for den projektive Geometri* (København, 1943), besonders § 7, S. 36—37.

Diese äußerst einfache Herleitung der Formel (10), ist durch das Studium eines früheren Aufsatzes von H. LIEBMANN[5]) und der ihm vorausgehenden Arbeit von D. HILBERT[6]) zu Tage gefördert.

§ 1. Koordinate eines unendlich fernen Punktes.

Es sei in der orientierten Ebene der Punkt O und der unendlich ferne Punkt Ω gegeben. Die Gerade $O\Omega$ werde von O nach Ω gerichtet. Wird die Ebene um O im positiven Sinne mit 90^0 gedreht, so ~~gehe~~ Ω in den unendlich fernen Punkt E über. Endlich sei die Gerade $\mathsf{E}\Omega$ von dem Grenzkreis durch O mit dem Mittelpunkt Ω in E geschnitten. Als die *Koordinate* ξ eines von Ω verschiedenen unendlich fernen Punktes Ξ in Bezug auf $O\Omega$, werde das Verhältnis $\xi = \widehat{OX} : \widehat{OE}$ erklärt, wobei X den Schnittpunkt der Geraden $\Xi\Omega$ mit dem genannten Grenzkreis bezeichnet. Das Vorzeichen dieses Verhältnisses werde positiv oder negativ genommen, je nachdem die Bogen $\widehat{OX}$ und $\widehat{OE}$ gleichsinnig oder ungleichsinnig sind.

Bezeichne T die Projektion von Ξ auf $O\Omega$ (falls die Gerade $O\Xi$ von $O\Omega$ verschieden ist), und die Gerade $\Xi\Omega$ schneide den Grenzkreis durch T mit dem Mittelpunkt Ω in U. Wegen der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $T\Omega\Xi$ und $O\Omega\mathsf{E}$ (mit je zwei Nullwinkeln) ist $\widehat{TU} = \widehat{OE}$, also mit $t = \overline{OT}$ ausgedrückt, wird

$$|\xi| = \widehat{OX} : \widehat{TU} = e^{\frac{t}{k}}. \tag{1}$$

Der Winkel $\tau = \sphericalangle \Omega O \Xi$ gehört dem Lote t als Parallelwinkel an, und es ist $t \gtrless 0$, je nachdem τ spitz oder stumpf ist. Wird der andere unendlich ferne Punkt von $O\Xi$ mit Ξ' bezeichnet, so ist der Betrag der Koordinate ξ' von Ξ' auf Grund von (1) offenbar

$$|\xi'| = e^{-\frac{t}{k}}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt noch

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}, \tag{3}$$

da doch ξ und ξ' entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Die nachstehenden drei Hilfssätze sind unmittelbare Folgen der eben gesagten.

---

[5]) H. LIEBMANN, Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, 59 (1904), S. 110—128.

[6]) D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, 57 (1903), S. 137—150, oder *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III, S. 159—177.

Hilfssatz 1. *Geht die Gerade $O\Omega$ um Ω gedreht in die Lage $O'\Omega$ über, so wird die neue Koordinate von Ξ*

$$\xi' = \xi - \lambda,$$

wobei $\lambda = \widehat{OO'}$, positiv oder negativ genommen, je nachdem $\widehat{OO'}$ und $\widehat{OE}$ *gleichsinnig oder ungleichsinnig sind.*

Hilfssatz 2. *Wird der Punkt O längs der gerichteten Gerade $O\Omega$ in O' verschoben, so ist die neue Koordinate von Ξ*

$$\xi' = e^{-\frac{a}{k}}\xi,$$

wobei $a = \overline{OO'}$, mit Vorzeichen genommen.

Hilfssatz 3. *Bezeichnet Ω' den anderen unendlich fernen Punkt von $O\Omega$, so ist die Koordinate von Ξ (verschieden von Ω und Ω') in Bezug auf $O\Omega'$*

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}.$$

§ 2. Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes.

Es sei die Koordinate ξ des unendlich fernen Punktes Ξ, als Funktion des Winkels $\tau = \sphericalangle \Omega O \Xi$ aufgefaßt, $\xi = f(\tau)$. Hierbei soll τ die *analytische Maßzahl* des Winkels bedeuten, d. h. die Einheit für die Winkelmessung sei so gewählt, daß sich für den rechten Winkel die Maßzahl $\frac{\pi}{2}$ ergibt. Diese Funktion ist im Intervalle $0 < \tau < \pi$ positiv, und nimmt bei wachsendem τ beständig abnehmend alle positiven Werte an, sie ist also auch stetig. Für diese Funktion leiten wir in jenem Intervalle eine Funktionalgleichung her indem wir $f(\tau + \sigma)$ durch $f(\tau)$ und $f(\sigma)$ ausdrücken.

Es sei Ω_1 derjenige unendlich ferne Punkt, für den $\sphericalangle \Omega O \Omega_1 = -\sigma$ ausfällt. Dann ist $\sphericalangle \Omega_1 O \Xi = \tau + \sigma$, also die Koordinate von Ξ in Bezug auf $O\Omega_1$ offenbar gleich $f(\tau + \sigma)$. Die Gerade $\Omega\Omega_1$ werde vom Grenzkreis durch O mit dem Mittelpunkt Ω in O_1, und von dem mit dem Mittelpunkt Ω_1 in O_2 geschnitten. Geht man von der ursprünglichen Geraden $O\Omega$ der Reihe nach zur $O_1\Omega$, $O_1\Omega_1$, $O_2\Omega_1$, $O\Omega_1$ über, so ergibt sich durch die Anwendung der Hilfssätze 1, 3, 2, und wieder 1, für die Koordinate von Ξ in Bezug auf $O\Omega_1$

$$f(\tau + \sigma) = -\frac{m}{f(\tau) + f(\sigma)} + f(\sigma) = \frac{f(\tau)f(\sigma) + f(\sigma)^2 - m}{f(\tau) + f(\sigma)}, \tag{4}$$

wobei m eine gewisse positive Zahl bedeutet. Diese Zahl kann gleich bestimmt werden. Die Koordinate des anderen unendlich fernen Punktes Ξ' von $O\Xi$

in Bezug auf $O\Omega$ ist nämlich nach (3) gleich $-\frac{1}{f(\tau)}$, auf $O\Omega_1$ bezogen ergibt sich also für diese Koordinate in ähnlicher Weise der Wert

$$\frac{-\frac{f(\sigma)}{f(\tau)}+f(\sigma)^2-m}{-\frac{1}{f(\tau)}+f(\sigma)}=\frac{[f(\sigma)^2-m]f(\tau)-f(\sigma)}{f(\tau)f(\sigma)-1}.$$

Im Sinne von (3) ist aber diese Koordinate auf Grund von (4) andererseits

$$-\frac{1}{f(\tau+\sigma)}=\frac{-f(\tau)-f(\sigma)}{f(\tau)f(\sigma)+f(\sigma)^2-m},$$

also gilt notwendigerweise

$$f(\sigma)^2-m=-1.$$

Aus (4) entsteht deshalb die Funktionalgleichung

$$f(\tau+\sigma)=\frac{f(\tau)f(\sigma)-1}{f(\tau)+f(\sigma)}. \tag{5}$$

Mit der Bezeichnung

$$f(\tau)=\operatorname{ctg} F(\tau), \qquad 0<F(\tau)<\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

nimmt (5) die Gestalt

$$F(\tau+\sigma)=F(\tau)+F(\sigma) \tag{7}$$

an, da mit Rücksicht auf (6) $0<F(\tau)+F(\sigma)<\pi$ ist. Mit $f(\tau)$ ist aber auch die unter (6) definierte Funktion $F(\tau)$ im Intervalle $0<\tau<\pi$ stetig, aus (7) folgt daher

$$F(\tau)=c\tau \tag{8}$$

mit konstantem c. Da an der Stelle $\tau=\frac{\pi}{2}$ offenbar

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg} F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

und somit $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ ausfällt, so ist unter (8)

$$c=\frac{1}{2}.$$

Aus (6) folgt demnach

$$f(\tau)=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}. \tag{9}$$

Im Sinne von (1) ist andererseits

$$f(\tau)=e^{\frac{t}{k}},$$

und so entsteht also aus (9) die klassische Formel [7])

$$\operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} = e^{\frac{t}{k}}, \tag{10}$$

Damit ist der Parallelwinkel τ als Funktion des Lotes t bestimmt.

Wie schon erwähnt, die Grundformeln der hyperbolischen Trigonometrie können aus (10) leicht gewonnen werden.

(*Eingegangen am 19. September 1952.*)

---

[7]) Vgl. J. Bolyai, loc. cit.[3]), ferner F. Engel, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, etc.* (Leipzig, 1898), S. 20, Formel (12).