Bibliographie.

Frédéric Riesz et Béla Sz.-Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle, VIII + 448 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952.

Every analyst will wish to peruse this new book of Professors Riesz and Sz.-Nagy, and he will do so with delight both in what the authors have to teach him and in the simple, lucid ways which they have discovered for making their subject appear in the most brilliant light. This, indeed, is what both writers have led the mathematical public to expect on the basis of their published work, and they are far from having disappointed their readers here. The book represents the contents of lecture-courses offered by the respective authors to their university students over the years. Accordingly it is designed neither to survey in their totality the many important mathematical contributions of the authors nor to treat in the fullest generality the topics they have chosen to discuss. A glance at the extensive bibliography and a rapid examination of the references to it in the text are enough to show not only that Professors Riesz and Sz.-Nagy are very well aware of the current developments in linear functional analysis, including those outside their own circle of ideas, but that they take considerable care to make the reader equally so. Thus it is possible to experience an unalloyed pleasure in savoring the rather strong personal flavor the authors have imparted to their book in the matter of mathematical style. The ambitious student will not be the only reader who will profit by attending closely to the essential elements of this style — the artful implementation of basically simple approaches by ingenious turns of argument, calculated to resolve the chief difficulties with every appearance of ease; a sure mastery of the rewarding passage from the concrete and particular to the abstract and general; and the undeviating concern with those immanent patterns which, once disclosed, give unity and meaning to mathematics. In an age when mathematics is growing almost too rapidly in extent and in complexity, we owe a great debt indeed to those, like Professors Riesz and Sz.-Nagy, who put to the best use exceptional talents for rendering accessible and perspicuous the pioneering discoveries of the day, whether their own or those of others.

The first part of the book, written by Professor Riesz, consists of three chapters devoted to the modern theories of differentiation and integration. In Chapter I will be found the beautiful proof, due to Riesz himself, of the classical theorem of Lebesgue on the differentiability of monotone functions and functions of bounded variation. Among the interesting results which are here associated with this theorem we may mention Fubini's theorem on the differentiability of series, Lebesgue's density theorem, the theorem of Denjoy—Young—Saks, the classical criterion for Riemann integrability, fundamental properties of interval-functions and their integrals, and the differential properties of rectifiable curves. The two further chapters contain the development of the Lebesgue integral in one-dimensional space, its extension to n-dimensional euclidean space, and its generalization (following a discussion of the Stieltjes integral) to abstract spaces by Daniell's method. In addition to an original treatment of the standard topics, including the L_p-spaces, there is a comparative analysis of various definitions of the Lebesgue integral and its connections with both the Stieltjes and the Denjoy—Perron—Khintchine integrals. There are also sections devoted to differentiation on nets, the moment problem, and other pertinent topics. The reviewer notes with particular satisfaction and sympathy that the authors declare themselves in favor of giving the integral the place of honor and defining measure in terms of it, thus reversing the procedures of Lebesgue and Carathéodory. Since the integral, rather than the related measure, is of primary concern to the analyst, it is not surprising that other writers [1]) have recently adopted the same point of view. L. SCHWARTZ's theory of distributions confirms the wisdom of this course, so far as analysis is concerned. The reviewer believes that similar confirmation will be found in geometry [2]). Even the theory of probability, which is invariably cited by the proponents of measure-theory in justification of their preference, can undoubtedly be recast in terms of expected values — that is, of abstract integrals — if an axiomatic parallel to KOLMOGOROFF's formulation in terms of probabilities — that is, of abstract measures — is desired. From a technical point of view there are certainly many advantages in treating the integral first. This appears plainly in the present book, and also in other current developments which the authors have not taken explicitly into account because their manuscript was already completed in 1948. In addition to the references made above, we may mention the papers of COTLAR and RICABARRA and of KAWADA [3]), who were independently stimulated by the reviewer's notes to transfer CARATHÉODORY's measure-theoretic techniques to integration theory.

The second part of the book, written by Professor SZ.-NAGY, deals with integral equations and linear transformations in Hilbert and Banach spaces. The treatment of integral equations, found in Chapter IV, serves as an introduction to operator theory. It is based on the methods of GOURSAT, FREDHOLM and F. RIESZ, and leads to a brief discussion of the integral equations of potential theory. The elements of Banach and Hilbert space theory are given in Chapter V. Results of PALEY and WIENER on biorthogonal sets and RIESZ's theory of completely continuous operators provide interesting special topics. The following chapter analyzes completely continuous symmetric operators in Hilbert space and the extremal properties of their characteristic values and vectors. Applications to integral operators, the problems of the vibrating cord, and the theory of almost periodic functions are indicated. Chapter VII is concerned with bounded symmetric, unitary and bounded normal operators and their spectral analysis. The spectral theorem for bounded symmetric operators is proved in two familiar ways due respectively to RIESZ and SZ.-NAGY. The general form of unitary operators in L_2 is determined following BOCHNER, and is applied to the Watson and Fourier transformations. Non-bounded operators constitute the subject-matter of Chapter VIII, where the graphical method of VON NEUMANN is made the basis for a general discussion. The spectral theory for self-adjoint operators is proved both by the method of RIESZ and LORCH and by VON NEUMANN's Cayley transform method, which serves also to characterize all symmetric extensions of a symmetric operator. The procedures of FRIEDRICHS and M. KREIN for determining self-adjoint extensions of a semi-bounded symmetric operator are also discussed here. Chapter IX treats the operational calculus, commuting families of self-adjoint operators, and the perturbation theory; Chapter X touches on the elements of the theory of groups and that of semi-groups, with applications to the mean ergodic theorems; and finally Chapter XI examines our rather limited information about the spectral analysis and operational calculus of general operators, the concluding sections being devoted to VON NEUMANN's recent theory of spectral sets. From this summary, it will be seen that the more sophisticated aspects of the modern theory of Hilbert space are not

[1]) N. BOURBAKI, *Intégration* (Éléments de Mathématique XIII, Paris, 1952); M. H. STONE, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A.*, **34** (1948), pp. 336—342, 447—455, 483—490, and **35** (1949), pp. 50—58.

[2]) See H. WHITNEY, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950, I, pp. 245—256.

[3]) MISCHA COTLAR and RODOLFO RICABARRA, *Las Ciencias*, Año XV, pp. 249—252; *Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid, Serie de Ciencias Exactas*, **4** (1950), No. 2; Y. KAWADA, *Scientific Papers of the College of General Education*, Tokyo, **1** (1951), pp. 15—18.

taken up. The bibliography contains a list of references to papers where the theories of operator rings, factors, and group-representations are investigated, but the curious reader will need to supplement this list in a rather substantial way if he wishes to obtain an adequate knowledge of all modern trends. The relevant mathematical contributions have come chiefly from France, the U. S. A., and the U. S. S. R., though other countries too have played a rôle in these developments. Among the authors who would need to be consulted beyond the limits of the bibliography in the present book we may mention: BARGMANN, BEURLING, DIXMIER, GELFAND, GODEMENT, KAPLANSKY, MACKEY, MAUTNER, MURRAY, VON NEUMANN, NEUMARK, SEGAL, and STONE.

M. H. Stone (Chicago).

Н. Г. Чеботарев, Собрание сочинений, два тому, стр. 340+416, Москва—Ленинград, Издательство Академии Наук СССР, 1949.

[**N. G. Tschebotareff, Gesammelte Werke,** zwei Bände, 340+416 Seiten, Moskau—Leningrad, Akademischer Verlag, 1949.]

N. G. TSCHEBOTAREFF (1894—1947) war einer der bedeutendsten Algebraiker des ersten Drittels des zwanzigsten Jahrhundertes. Seine über die Dichtigkeit der Primideale in algebraischen Zahlkörpern endlichen Grades und über das Klein—Hilbertsche Resolventenproblem geschriebenen Werke gehören zu den wichtigsten algebraischen Arbeiten der letzteren Jahrzehnte. Als Anerkennung seiner hervorragenden wissenschaftlichen Arbeiten bekam er den Stalin-Preis ersten Grades.

Die „Werke" enthalten alle seine im Druck erschienenen 62 Artikeln (die ursprünglich fremdsprachigen sind in die russische Sprache übersetzt worden). Die Arbeiten sind möglichst nach ihrem Themenkreis (algebraische Zahlentheorie, Theorie der Polynome, Geometrie, u. s. w.) angeordnet, obwohl die Vielseitigkeit der Arbeiten von TSCHEBOTAREFF die Durchführung dieser Anordnung schwer machte.

Am Anfang des Buches steht eine Photographie von TSCHEBOTAREFF. Das Vorwort hat B. N. DELONE geschrieben, der der verantwortliche Redaktor des Werkes ist. Am Ende beider Bände befindet sich je ein Namenregister der in den Arbeiten zitierten Mathematiker.

O. Steinfeld.

Kurze Mathematiker-Biographien. J. O. Fleckstein: Johann und Jacob Bernoulli. — L. Kollros: Evariste Galois. — Oystein Ore: Niels Henrik Abel. — René Taton: Gaspard Monge. — Jean Itard: Pierre Fermat. — L. v. Dávid: Die beiden Bolyai. Beihefte Nr. 6—11 zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik", Basel, Verlag Birkhäuser, 1949—1951.

Jede Kurzbiographie enthält je ein Porträt, ein Facsimile, die wichtigsten Daten, die Charakterisierung der Persönlichkeit, die Würdigung des Werkes an Beispielen, mehrere Illustrationen, und hat den Umfang von 24 Seiten. Die Hefte über die Brüder BERNOULLI und über die beiden BOLYAI sind deutsch, die übrigen französisch geschrieben.

JACOB BERNOULLI (1654—1705) und sein Bruder JOHANN (1667—1748) waren die ersten Mathematiker der berühmten Mathematiker-Dynastie BERNOULLI und haben in der Begründung der Infinitesimalrechnung einen unvergänglichen Ruhm sich und ihrer Heimat, der Schweiz verschaffen.

In der Geschichte der Wissenschaften ist das Leben von E. GALOIS (1811—1832) ganz außergewöhnlich. In der modernen Mathematik hat kein so junger Mathematiker in so kurzer Zeit so viel bedeutendes geleistet. Die Kurzbiographie über GALLOIS gibt nicht nur eine gute Übersicht der wesentlichen Ergebnisse von GALOIS, sondern auch eine Übersicht der Entwicklung der gruppentheoretischen Vorstellungen von GALOIS in verschiedenen Gebieten der Mathematik: in der Algebra, in der Geometrie und in der Funktionentheorie.

Die Kurzbiographie von NIELS HENRIK ABEL (1802—1829) gibt eine gelungene Übersicht vom Leben und von den großen Resultaten des früh gestorbenen berühmten norvegischen Mathematikers. Unseres Wissens war ABEL einer der wenigen Mathematiker, dem seine dankbare Heimat ein Denkmal gestellt hat. Leider enthält die Kurzbiographie kein Bildnis davon.

Die Kurzbiographie von FERMAT (1601—1665) berichtet über die bedeutendsten Leistungen von FERMAT in der Zahlentheorie, in der Methode der Ausrechnung von Maxima und Minima und in anderen mathematischen Gebieten.

Die Kurzbiographie von G. MONGE (1746—1818) berichtet über die mathematische Tätigkeit von MONGE in der darstellenden Geometrie, in der Differentialgeometrie, in den partiellen Differentialgleichungen und in der Begründung der École Polytechnique und der ersten mathematischen Zeitschrift: Journal de l'École Polytechnique.

Die Kurzbiographie von den beiden BOLYAI, vom Vater WOLFGANG (1775—1856) und vom Sohn JOHANN (1802—1860), dem Begründer der nichteuklidischen Geometrie, enthält ein Porträt nur vom Vater, weil kein Porträt von JOHANN bekannt ist. Das Heft enthält ein Facsimile des berühmten Briefes von JOHANN (3. Nov. 1823) an seinen Vater, in dem er betreffs seiner geometrischen Untersuchungen die Worte schreibt: „ich habe aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen". Der Wert der Ergebnisse von JOHANN BOLYAI wurde von GAUSS öffentlich niemals anerkannt. Dies wurde für das Leben von JOHANN tragisch. Hingegen wurde der andere Begründer der nichteuklidischen Geometrie, LOBATSCHEFSKIJ auf den Antrag von GAUSS zum Mitglied der Göttinger Gelehrten Gesellschaft gewählt. Das diesbezügliche Diplom hat GAUSS mit einem eigenhändigen Begrüßschreiben zugesandt. Auch dann hat GAUSS BOLYAI nicht erwähnt, sodaß LOBATSCHEFSKIJ von BOLYAI niemals gehört hat. Die Ursache dieses mindestens unobjektiven Verfahrens von GAUSS gegen den Sohn seines Jugendfreundes WOLFGANG BOLYAI bleibt uns auch heute, 150 Jahre nach JOHANN BOLYAI's Geburt unbegreiflich.

Gyula Sz.-Nagy.

Gustave Verriest, Introduction à la géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire, VII + 193 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

Das vorliegende Buch führt den Leser auf dem Wege einer streng axiomatischen Darstellung in die hyperbolische Elementargeometrie ein, beschränkt sich aber auf die Behandlung planimetrischer Sätze. Zugrunde gelegt wird das Axiomensystem von D. HILBERT; das Parallelenaxiom wird aber durch das folgende Axiom ersetzt: In der Ebene, die eine Gerade a und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P enthält, gehen durch P mindestens zwei Geraden, die a nicht schneiden. Außerdem werden das Archimedische Axiom und das Vollständigkeitsaxiom durch das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom ersetzt. Das letzte Kapitel bringt die Elemente der sphärischen, bzw. der elliptischen Geometrie, ohne einen axiomatischen Aufbau geben zu wollen.

Das ganze Werk besteht aus elf Kapiteln. In den ersten sieben Kapiteln, die mehr als die Hälfte des Buches ausmachen, handelt es sich um solche Sätze, die von dem Parallelenaxiom unabhängig sind, die also einen gemeinsamen Teil der euklidischen und hyperbolischen Geometrie bilden.

Aus dem eigentlichen Stoffe der hyperbolischen Geometrie wird verhältnismäßig wenig bearbeitet. Im achten Kapitel handelt es sich besonders eingehend um den Dreiecksinhalt, im neunten wird die Theorie der hyperbolischen Parallelen und der Überparallelen (solcher Geraden der Ebene, die sich weder schneiden noch parallel sind) dargestellt. Hier wird unter anderem der Satz bewiesen (nach dem Vorgange von D. HILBERT), laut welchem zwei Überparallelen ein gemeinsames Lot besitzen. Der Beweis für die Existenz der Verbindungsgeraden zweier unendlich fernen Punkte wird unter Berufung auf seine Weithäufigkeit beiseite gelassen. Dieser Satz wird aber gar nicht benützt. Dieses Kapitel schließt sich mit der Besprechung des Klein—Poincaréschen Modells der hyperbolischen Ebene. Das zehnte Kapitel befaßt sich mit den asymptotischen Dreiecken, mit den Grenzkreisen und Überkreisen. Die Existenz eines dreifach asymptotischen Dreiecks wird nicht bewiesen (wieder unter Berufung auf die Länge des Beweises), aber auch nicht verwendet.

Zum Schluß gibt das elfte Kapitel einen Einblick in die sphärische, bzw. elliptische Elementargeometrie. Neben der absoluten Polarität des elliptischen Raumes werden auch die Cliffordschen Parallelen besprochen. Das Kleinsche Modell der elliptischen Raumgeometrie wird gestreift.

Die Darstellung ist ausführlich und klar, das Buch sehr gut übersichtlich. Die Bearbeitung noch weiterer Gebiete mit Heranziehung der Raumgeometrie hätte gewiß bei den meisten Lesern Beifall gefunden. Der Beweis des Satzes, laut welchem auf der Grenzkugel die euklidische ebene Geometrie gilt, wäre von höchstem Interesse gewesen, da dieser Satz zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie den bequemsten Weg eröffnet.

Es ist zu bedauern, daß der Verfasser den Namen von Johann Bolyai in Verbindung mit der hyperbolischen Geometrie gar nicht erwähnt und ausschließlich von der Lobatschefskyschen Geometrie spricht.

Paul Szász.

Heinz Rutishauser—Ambros Speiser—Eduard Stiefel, Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen) (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich, Nr. 2), 102 Seiten, Basel, Verlag Birkhäuser, 1951.

Als Abdruck mehrerer in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik" erschienenen Artikel gibt das Buch eine kurze Übersicht über die mathematischen und technischen Grundlagen jener mit Ziffern arbeitenden elektronischen Rechenmaschinen, die eine längere Kette von Grundoperationen (und auch Operationen der math. Logik) nach einem Rechenplan vollautomatisch abwickeln. Wir gewinnen einem Einblick, wie die Ausgangswerte und die Befehle der Rechenpläne und Unterpläne in der Maschine als Folge elektrischer Impulse dargestellt werden, wie die Maschinen die Grundoperationen durchführen und wie sie die Resultate zurückübersetzen. Man betrachtet dann die Grundprinzipien der Vorbereitung der Rechenpläne und der Kontrolle, und endlich die physikalischen Grundlagen. Das Buch enthält noch eine tabellarische Übersicht über 18, Ende 1949 im Betrieb oder im Bau befindlichen Rechenautomaten.

T. Bakos.

Arthur Linder, Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. III), 2. erweiterte Auflage, 238 S., Basel, Verlag Birkhäuser, 1951.

In der vorliegenden verbesserten und erweiterten Auflage stellt das Buch noch immer das einzige neuere deutschsprachige Lehrbuch der mathematischen Statistik dar — wenn man von H. Gebeleins zu eigenartiger „Zahl und Wirklichkeit" absieht. Im ersten Viertel des Buches wird die beschreibende Statistik bis zur linearen Regression und Teilregression behandelt. Das zweite Viertel bringt die klassischen Prüfverfahren. Ein darauf folgendes Achtel ist der Varianzanalyse gewidmet. Der Rest gibt die nachträgliche theoretische Unterstützung. Stoff und Geist entsprechen dabei dem von R. A. Fischer vor mehr als zwanzig Jahren erreichten Standpunkt. In diesem, heute als beschränkt zu betrachtendem Kreis wird aber der Gegenstand für den Praktiker sorgfältig durchgearbeitet und an Beispielen erläutert.

T. Szentmártony.

Helmut Hasse, Höhere Algebra I, II, dritte, verbesserte Auflage (Sammlung Göschen, Bd. 931, 932), 152 u. 158 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1951.

In diesen Bändchen behandelt der Verfasser die Grundaufgabe der klassischen Algebra mit modern-algebraischer Methode. Der erste Band enthält die grundlegende Untersuchung der formalen Rechenbereichen (Ringe, Körper, Integritätsbereiche, doch diese nur im kommutativen Fall, und Gruppen), die Behandlung der linearen Algebra, und zwar determinantenfrei (Toeplitzsches Verfahren) und auch mit Determinanten. Im zweiten Band werden die Grundlagen der Theorie der algebraischen Körpererweiterungen mit der ausführlichen Theorie der endlich algebraischen Theorie der Erweiterungen, die Galoissche Theorie und die der Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen entwickelt.

Gegenüber den vorigen wurde die neue Auflage mit einigen Ergänzungen erweitert (z. B. Isomorphismus und Erweiterungstypen bezüglich eines Teilbereiches). Es wurden (abweichend von der zweiten Auflage) auch die Begriffe der Separabilität und Inseparabilität aufgenommen und dann diese zur Definition der vollkommenen und unvollkommenen Körper verwendet. Als Neues tritt auch die Theorie der endlichen Körper hinzu.

J. Szendrei.

Helmut Hasse und Walter Klobe, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, zweite, verbesserte und vermehrte Auflage (Sammlung Göschen, Band 1082), 182 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1952.

Es ist erfreulich, daß diese wohlbekannte und im Unterricht und Selbststudium der Algebra sehr brauchbare Aufgabensammlung in einer neuen Auflage auf's neue zugänglich gemacht wird. Diese ist der dritten Auflage der Höheren Algebra angepaßt. Die neue Aufgabensammlung wurde mit Berücksichtigung der wertvollen Erfahrungen und Bemerkungen des Löser- und Leserkreises verbessert und vermehrt.

J. Szendrei.

L. Bieberbach, Theorie der geometrischen Konstruktionen (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 13), 170 Seiten, 102 Figuren, Basel und Stuttgart, Verlag Birkhäuser, 1952.

Dieses Lehrbuch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die Verfasser seit vier Jahrzenten an verschiedenen Universitäten gehalten hat. Die ersten fünf Paragraphen behandeln die Konstruktionen mit dem Lineal allein. Hier beweist Verf., daß man aus einem regulären n-Eck im Falle eines ungeraden n ein reguläres $2n$-Eck mit dem Lineal allein konstruieren kann; im Falle eines geraden n ist das nicht mehr möglich. Für die Poncelet-Steinerschen Konstruktionen wird die Notwendigkeit des gezeichneten Kreises gezeigt. Der Kreis läßt sich durch einen beliebigen Kreisbogen ersetzen. Bei den Poncelet-Steinersen Konstruktionen werden auch die hängenden Lineale von Weiss besprochen. Nach der Bestimmung des Körpers der Koordinaten der mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Punkte werden die Mohr-Mascheronischen Konstruktionen besprochen. Jede Konstruktion mit Lineal und Zirkel läßt sich durch ein Parallellineal oder durch ein Winkellineal (ohne Zirkel) durchführen. Sie lassen sich auch mit einem Lineal und mit einem Zirkel fester Öffnung durchführen (aber nicht allein mit einem Zirkel fester Öffnung, ohne Lineal). Normiertes Lineal ist ein Lineal, auf dessen Kante zwei Punkte markiert sind. Der Abstand dieser Punkte ist die Norm. In den Hilbertschen Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß kann man das Eichmaß mit der Norm ersetzen. Ein normiertes Lineal kann das Lineal und den Zirkel ersetzen, weil man damit die Schnittpunkte eines Kreises, dessen Halbmesser die Norm ist, mit jeder Geraden bestimmen kann. Die Unmöglichkeit der Trisektion und der Verdopplung des Würfels mit klassischer Anwendung des Zirkels und Lineals wird nach einer Jugendleistung von E. Landau bewiesen. Nach dem Beweis der Konstruierbarkeit Gaußischer regulärer Polygone werden die Konstruktionen dritten und vierten Grades eingehend behandelt. Dazu ist das erste Hilfsmittel das klassische Einschiebelineal. Das ist ein normiertes Lineal, dessen markierte Punkte auf je eine gezeichnete Linie (Gerade oder Kreis) fallen sollen. Als Beispiele wird die Konstruktion des regulären Siebenecks und eines Dreiecks aus zwei Seiten und aus dem Inkreisradius angegeben. Es werden auch andere Hilfsmittel für Konstruktionen dritten und vierten Grades besprochen und ihre Anwendungen an gut gewählte Bespielen erklärt. Solche Instrumente sind: Rechtwinkelhaken, Zimmermannshaken, Ellipsenzirkel, Kissoidenzirkel, ein gezeichneter Kegelschnitt, der kein Kreis ist. Mehrere interessante Beispiele zeigen die vielseitige Andwendbarkeit des von Hjelmslev herrührenden Deckblattes zur Konstruktionen dritten Grades. Es wird allgemein bewiesen, daß ein reguläres n-seitiges Vieleck mit dem Einschiebelineal nur dann konstruierbar ist, wenn n die Form $2^a 3^b p_1 p_2 \ldots p_v$ besitzt, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_v$ lauter verschiedene Primzahlen von der Form $2^q 3^r + 1$ sind. Die Transzendenz der Rektifikation und Quadratur des Kreises wird nach Gelfond bewiesen. Auch die quadrierberen Kreisbogenzweiecke bleiben nicht außer Acht. Es werden auch Näherungskonstruktionen algebraischer und transzendenter Aufgaben behandelt. Die Konstruktionen auf der Kugel mit Zirkel und Großzirkel erhalten eine systematische Darstellung.

Die abschließenden Anmerkungen und Zusätze enthalten u. a. werte Literaturangaben. Zu betonen ist im ganzen Werke das Streben nach der wirklichen Durchführung der Konstruktion einzelner Aufgaben, auch wenn die Möglichkeit der Konstruktion mit den angegebenen Instrumenten schon bewiesen wurde. Auch Kenner werden in diesem Werk neue Probleme und Beweise finden.

Gy. Sz.-Nagy.

M. Parodi, Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule 118), 64 pages, Paris, Gauthier—Villars, 1942.

Dieses Mémorialheft faßt die Ergebnisse der letzten Jahre über die Lage der charakteristischen Wurzeln der quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ zusammen. Die neuesten Ergebnisse stammen vom Verfasser selbst her.

Den Ausgang bildet ein Satz von Hadamard und eine Verallgemeinerung dieses Satzes von M. Müller. Nach dem Hadamardschen Satz verschwindet die Determinante der Matrix nicht, wenn die n Ungleichungen

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \equiv P_i \quad \text{oder} \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \equiv Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Die charakteristischen Wurzeln liegen in den Kreisen

$$|z - a_{ii}| \leqq P_i \quad \text{und} \quad |z - a_{ii}| \leqq Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und in den von Cassinischen Kurven begrenzten Bereichen

$$|z - a_{kk}| . |z - a_{ll}| \leqq P_k . P_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq l).$$

Der Kreis $|z - a_{mm}| \leqq P_m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ enthält genau eine charakteristische Wurzel von A, wenn die Gleichungen $|a_{mm} - a_{ll}| > P_m + P_l$ $(l \neq m;\ l = 1, 2, \ldots, n)$ bestehen. Die erhaltenen Sätze lassen sich auf die Bestimmung von oberen und unteren Schranken der absoluten Beträge und der reellen und imaginären Teile der Nullstellen von Polynomen anwenden.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit den Nullstellen einer Determinante, deren Elemente Polynome sind.

Gy. Sz.-Nagy.