Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen.

Von G. Szász in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Es sei S eine gegebene Menge mit ν Elementen; ν ist endlich oder unendlich. Ist in S eine (eindeutige) Multiplikation definiert, so sagen wir, daß die Menge S hinsichtlich der gegebenen Multiplikation eine *multiplikative Struktur* $S^\times$ bildet. Wir wollen bemerken, daß wir die Multiplikation in $S^\times$ im allgemeinen keinen einschränkenden Bedingungen unterwerfen.

Natürlich lassen sich aus einer gegebenen Menge S verschiedene Strukturen $S^\times$ bilden. Man nennt eine Struktur $S^\times$ eine *assoziative multiplikative Struktur* (anders gesagt, eine *Halbgruppe*), wenn alle Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad (xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S)$$

erfüllt sind. Die Gleichungen (1) werden *Assoziativitätsbedingungen* genannt.

Prof. L. Rédei hat während der Abfassung seines noch nicht erschienenen Lehrbuches über höhere Algebra das folgende Problem von prinzipieller Bedeutung aufgeworfen: Gibt es für eine gegebene Menge S von ν Elementen ein echtes Teilsystem der Gleichungen (1), so daß das Bestehen der Gleichungen dieses Teilsystems schon die Erfüllung der übrigen Gleichungen (1) nach sich zieht (nämlich bezüglich aller aus S gebildeten Strukturen $S^\times$). Es ist mir gelungen das Problem vollständig zu lösen, und zwar mit dem überraschenden Ergebnis, daß im Falle $\nu \geqq 4$ keine der Gleichungen (1) aus den übrigen folgt. Genauer gesagt: *Wie man auch im Falle einer Menge S mit wenigstens vier Elementen eine der Gleichungen* (1) *auszeichnet, kann man S zu einer multiplikativen Struktur $S^\times$ machen, so daß in $S^\times$ die ausgezeichnete Gleichung nicht erfüllt ist, die anderen Gleichungen aber erfüllt sind.* Kurz gesagt, im Falle $\nu \geqq 4$ bilden die Assoziativitätsbedingungen ein unabhängiges Axiomensystem.

Der Beweis stützt sich wesentlich auf den Fall $\nu = 3$. Teils aus diesem Grunde, teils der Vollständigkeit halber habe ich auch die Fälle $\nu \leqq 3$ untersucht. Es stellt sich heraus, daß die Assoziativitätsbedingungen im Falle $\nu \leqq 3$

nicht unabhängig sind; es ist mir auch gelungen in diesen Fällen ein unabhängiges vollständiges[1]) Teilsystem der Axiomen (1) anzugeben[2]).

Diese Arbeit gliedert sich, wie folgt: § 2. Vorbereitungen. § 3. Fall $\nu=3$ (erster Teil). § 4. Fall $\nu \geqq 4$. § 5. Fall $\nu=3$ (zweiter Teil). § 6. Fall $\nu=2$.[3])

§ 2. Vorbereitungen.

Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir mit den Buchstaben a, b, c, d verschiedene Elemente der Menge S bezeichnen. Dagegen werden die Buchstaben x, y, z, t zur Bezeichnung beliebiger (d. h. nicht unbedingt verschiedener) Elemente aus S dienen, wie schon oben in (1).

Zum Zweck des leichteren Ausdrucks vereinbaren wir uns in der folgenden Redeweise.

Ein Tripel (x, y, z) der Elemente von S wird *in* $S^{\times}$ *assoziativ* genannt, wenn $(xy)z=x(yz)$; ist dagegen $(xy)z \neq x(yz)$, dann wird das Tripel (x, y, z) *nichtassoziativ* genannt.

Wir sagen, daß ein Tripel (x, y, z) der Elemente der Menge S *isoliert* ist, wenn es eine multiplikative Struktur $S^{\times}$ gibt, in der allein das Tripel (x, y, z) nichtassoziativ ist. Unser Hauptresultat kann also auch folgendermaßen formuliert werden: Im Falle $\nu \geqq 4$ sind alle Tripel isoliert.

Zwei Tripel (x, y, z), (x', y', z') heißen *von gleichem Typ*, wenn sie auseinander durch eine Permutation der Elemente von S entstehen. Es gibt also die folgenden fünf Typen:

(2) $$(a, a, a),\quad (a, a, b),\quad (b, a, a),\quad (a, b, a)\quad (a, b, c),$$

wobei wir jedesmal einen Repräsentanten des Typs angegeben haben. (Der letzte der fünf Typen kommt nur im Falle $\nu \geqq 3$ vor.)

Es seien (x, y, z) und (x', y', z') zwei Tripel von S von gleichem Typ, und nehmen wir an, daß (x, y, z) isoliert ist. Dann können wir durch einfache Umbezeichnung der Elemente[4]) sofort einsehen, daß (x', y', z') auch

[1]) Wie üblich nennen wir ein Teilsystem eines Axiomensystems *vollständig*, wenn es mit dem ursprünglichen Axiomensystem äquivalent ist.

[2]) Im Fall $\nu=3$ ist dies nur auf eine Art möglich, im Fall $\nu=2$ aber auch auf verschiedene Arten. Im Fall $\nu=1$ gibt es nur eine einzige Struktur $S^{\times}$, die trivialerweise assoziativ ist. (D. h., in diesem Fall ist das „leere Teilsystem" von (1) vollständig, wenn es auch etwas komisch lautet.) Dementsprechend werden wir uns auf die Fälle $\nu \geqq 2$ beschränken dürfen.

[3]) Diese Arbeit wurde am 6-ten April 1953 der math.-phys. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt, und wird in den *Sitzungsberichten* dieser Klasse (*Osztályközlemények*) in ungarischer Sprache unter dem Titel „Az asszociativitásfeltételek függetlensége" erscheinen.

[4]) Bezüglich einer genauen Ausführung dieses übrigens wohlbekannten Prinzips siehe L. Rédei: Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **188** (1950), 201–227, insbesondere § 2.

isoliert ist. Man darf also mit Recht nicht nur über isolierte Tripel, sondern auch über *isolierte Typen* reden: man nennt einen Typ isoliert, wenn die in ihm enthaltenen Tripel isoliert sind. Hiernach wird nicht nötig alle Tripel nach der Isoliertheit hin zu untersuchen, sondern es wird genug je einen Repräsentanten aller fünf Typen zu betrachten.

Um die folgenden Betrachtungen leichter zu machen, schicken wir noch einige einfache Hilfssätze voraus, deren trivialer Beweis sich ersparen läßt.

Hilfssatz 1. *Die mit den Cayleyschen Tafeln angegebenen zwei Strukturen*

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array}$$

sind assoziativ.

Wir nennen, wie üblich, ein Element x einer multiplikativen Struktur $S^\times$ ein *linksseitiges Zeroelement,* wenn $xy = x$ für jedes y in S gilt; entsprechend ist ein *rechtsseitiges Zeroelement* zu verstehen. Ist ein Element gleichzeitig linksseitiges und rechtsseitiges Zeroelement, so nennen wir es einfach ein *Zeroelement.*

Hilfssatz 2. *Ist entweder x ein linksseitiges oder z ein rechtsseitiges Zeroelement, so sind alle Tripel (x, y, z) associativ.*

Hilfssatz 3. *Alle Tripel mit mindestens einem Zeroelement sind assoziativ.*

Hilfssatz 4. *Es sei $S^\times$ eine Unterstruktur der multiplikativen Struktur $T^\times$. Wenn für ein Element z der Menge $T-S$*[5]*) die Gleichungen*

$$xt = tx = z \qquad (x \in T,\ t \in T-S)$$

gelten, so stimmen die nichtassociativen Tripel von $T^\times$ mit den nichtassoziativen Tripel von $S^\times$ überein[6]). (Mit anderen Worten: sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 erfüllt, so sind alle Tripel assoziativ, die mindenstens ein Element von $T-S$ enthalten.)

Wir wollen bemerken, daß das Element z im Hilfssatz 4 ein Zeroelement ist. Andererseits ist leicht zu sehen, daß Hilfssatz 3 ein Spezialfall von Hilfssatz 4 ist, wo $T-S$ allein aus dem Zeroelement von $T^\times$ besteht.

Ein Element x von $S^\times$ nennen wir ein *linksseitiges Einselement,* wenn $xy = y$ für jedes y in S gilt.

Hilfssatz 5. *Ist x ein linksseitiges Einselement, so ist das Tripel (x, y, z) assoziativ.*

Hilfssatz 6. *Ist ein Element x idempotent, so ist das Tripel (x, x, x) assoziativ.*

---

[5]) $T-S$ bedeutet die Menge aller Elemente von T, die in S nicht enthalten sind.

[6]) Man darf $T^\times$ auch eine *triviale Erweiterung* von $S^\times$ nennen, denn bei dem Übergehen von $S^\times$ zu $T^\times$ ist der Wert aller „neuen" Produkte gleich z.

§ 3. Fall $\nu = 3$ (erster Teil).

Hier werden wir uns mit den Strukturen $S^\times$ beschäftigen, die sich aus der Menge[7]) $S = \{a, b, c\}$ mit drei Elementen bilden lassen.

Lemma 1. *Die Tripel der Menge $S = \{a, b, c\}$, die nicht vom Typ (a, a, a) sind, sind isoliert.*

Den Beweis führen wir so, daß wir je eine Struktur $S^\times$ angeben, in welcher der Reihe nach allein das Tripel (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) bzw. (a, b, c) nichtassoziativ ist, die übrigen Tripel aber assoziativ sind. (Mit dem Typ (a, a, a) werden wir uns im § 5 beschäftigen; dort werden wir sehen, daß dieser Typ — für Mengen mit drei Elementen — nicht isoliert ist.)

1°. Um die Isoliertheit des Tripels (a, a, b) zu zeigen, betrachten wir die mit der Cayleyschen Tafel angegebene Struktur[8])

$$(3) \qquad \begin{array}{c|ccc} \circ & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

Man sieht sofort, daß ein Produkt in (3) nur dann $\neq c$ sein kann, wenn sein erster Faktor a ist. Andererseits ist $xy \neq a$, woraus stets $(xy)z = c$ folgt.

Dagegen ist dann und nur dann $x(yz) \neq c$, wenn $x = a$ und $yz = b$, d. h. wenn $x = a$, $y = a$ und $z = b$ ist.

Damit haben wir gezeigt, daß in der Struktur (3) (a, a, b) nichtassoziativ ist, alle anderen Tripel aber assoziativ sind. Das Tripel (a, a, b) ist also isoliert.

2°. Durch Spiegelung der vorigen Cayleyschen Tafel an der Diagonale erhält man die Struktur

$$(4) \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

in der (b, a, a) das einzige nichtassoziative Tripel ist. Um dies zu zeigen, kann man ähnlich wie in 1° verfahren, nur muß man die Rolle der Zeilen

---

7) Das Zeichen $\{\ldots\}$ verstehen wir im üblichen mengentheoretischen Sinne.

8) Dieses Beispiel haben wir aus der Arbeit von Al. C. Climescu, Etudes sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes I., L'indice de non-associativité, *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy*, **2** (1947), 97—121, übernommen, wir geben aber einen vollständigen Beweis an. Climescu betrachtet in seiner Arbeit ebenfalls das Problem der Assoziativitätsbedingungen, aber von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus als wir. Er nennt nämlich die Anzahl der nicht erfüllten Gleichungen (1) einer Struktur $S^\times$ mit ν Elementen (ν endlich) den *Index* (der Nichtassoziativität) dieser Struktur. Der Index ist also gewiß eine der Zahlen $0, 1, \ldots, \nu^3$. Climescu hat die sehr interessante Tatsache nachgewiesen, daß es im Fall $\nu \geq 3$ zu jedem Wert von i mit $0 \leq i \leq \nu^3$ eine Struktur mit ν Elementen gibt, deren Index i ist.

und Spalten von (3) überall vertauschen. Also ist auch der Typ (b, a, a) isoliert.

3°. Wir betrachten nun die mit der Cayleyschen Tafel

$$(5) \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

angegebene Struktur $S^{\times}$. In dieser ist daß Tripel (a, b, a) nichtassoziativ, denn es gilt

$$(ab)a = ca = c, \qquad a(ba) = aa = a.$$

Die übrigen Tripel sind aber assoziativ, wie das die folgenden Ausführungen zeigen.

Da c in (5) ein Zeroelement ist, so ist jedes Tripel, das das Element c enthält, nach Hilfssatz 3 assoziativ. Es genügt also noch diejenigen Tripel zu untersuchen, in welchen das Element c nicht vorkommt.

Da ferner b ein linksseitiges Einselement ist, so ist jedes Tripel mit dem ersten Element b nach Hilfssatz 5 assoziativ.

Es sind also nur noch diejenigen Tripel von der Form (a, y, z) zu untersuchen, in denen y und z beide aus den Elementen a und b sind. Insbesondere haben wir aber die Nichtassoziativität von (a, b, a) schon oben festgestellt, ferner ist (a, a, a) nach Hilfssatz 6 assoziativ. Endlich gelten für die übrigen zwei Tripel der genannten Art

$$(aa)b = ab = c, \qquad a(ab) = ac = c;$$
$$(ab)b = cb = c, \qquad a(bb) = ab = c;$$

so daß auch (a, a, b) und (a, b, b) assoziativ sind.

Wir haben somit bewiesen, daß der Typ (a, b, a) isoliert ist.

4°. Endlich sei

$$(6) \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$$

die Cayleysche Tafel einer multiplikativen Struktur. Es ist dann zunächst

$$(ab)c = ac = c, \qquad a(bc) = ab = a,$$

wonach (a, b, c) nichtassoziativ ist. Wir zeigen, daß die übrigen Tripel assoziativ sind.

Da b und c linksseitige Zeroelemente sind, so sind nach Hilfssatz 2 alle (b, y, z) und (c, y, z) assoziativ. Man braucht also weiterhin nur die Tripel mit dem Anfangselement a zu betrachten.

Man sieht aus (6), daß die Elemente a, b bzw. a, c je eine Unterstruktur der mit (6) gegebenen Struktur bilden. Diese Unterstrukturen sind nach

Hilfssatz 1 beide assoziativ. Deshalb sind auch diejenigen mit a beginnenden Tripel assoziativ, die außer a nur eines von den Elementen b, c enthalten.

Man hat also noch die Tripel mit dem Anfangselement a zu untersuchen, in welchen b und c gleichzeitig vorkommen. Es gibt zwei Tripel von dieser Art, nämlich (a, b, c) und (a, c, b). Das erste von diesen ist aber das oben schon betrachtete nichtassoziative Tripel, das also nicht hierher gehört. Für das zweite gelten

$$(ac)b = cb = c, \qquad a(cb) = ac = c.$$

Hiermit haben wir die Isoliertheit des Typs (a, b, c) gezeigt, womit Lemma 1 völlig bewiesen ist.

§ 4. Fall $\nu \geqq 4$.

Auf Grund der oben für den Fall $\nu = 3$ gewonnenen Resultate beweisen wir hier unseren Hauptsatz.

Satz 1. *Vorausgesetzt, daß die Menge S mindestens vier Elemente hat, bilden die Gleichungen* (1) *ein unabhängiges Axiomensystem.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß im Fall $\nu \geqq 4$ alle Tripel isoliert sind. Zu diesem Zwecke bemerken wir folgendes. Betrachten wir zwei Mengen $S = \{a, b, c\}$, $T = \{a, b, c, d, \ldots\}$ wobei also T eine Erweiterungsmenge von S mit mindestens vier Elementen ist, und bilden aus ihnen je eine multiplikative Struktur $S^\times$, $T^\times$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

1. $T^\times$ ist eine Erweiterungsstruktur von $S^\times$;
2. für alle $t \in T - S$, $x \in T$ gilt $xt = tx = d$.

Nach Hilfssatz 4 stimmen die nichtassoziativen Tripel von $T^\times$ mit den von $S^\times$ überein. Wendet man diese Bemerkung mit den durch die Cayleyschen Tafeln (3)—(6) definierten vier Strukturen $S^\times$ an, so erhält man je eine Struktur $T^\times$ mit $\nu \geqq 4$ Elementen mit den einzigen nichtassoziativen Tripel (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) bzw. (a, b, c).

Es bleibt noch der Typ (a, a, a) zu untersuchen übrig. Um die Isoliertheit von (a, a, a) für $\nu \geqq 4$ zu zeigen, betrachten wir die aus der Menge $S = \{a, b, c, d, \ldots\}$ gebildete Struktur $S^\times$, in der die Multiplikation folgenderweise definiert ist:

(7. 1) $\quad aa = b$;
(7. 2) $\quad ab = c$;
(7. 3) $\quad xy = d$ für alle übrigen Elementenpaare x, y.

Vor allem gilt in dieser Struktur

$$(aa)a = ba = d, \qquad a(aa) = ab = c,$$

also ist (a, a, a) ein nichtassoziatives Tripel. Wir zeigen die Assoziativität der übrigen Tripel.

Da im Fall $x \neq a$ unbeschränkt $xt = d$ gilt, so ist für jedes Tripel (x, y, z) mit $x \neq a$

$$(xy)z = dz = d, \qquad x(yz) = d.$$

Man braucht also nur noch die Tripel von der Form (a, y, z) zu untersuchen.

Ist y eins von den Elementen $c, d, \ldots$, so gilt

$$(ay)z = dz = d, \qquad a(yz) = ad = d.$$

Ist andererseits z eins von den Elementen $c, d, \ldots$, so gilt (wegen $tc = td = \cdots = d$ für beliebige t in S)

$$(ay)z = d, \qquad a(yz) = ad = d.$$

Mithin sind nur noch die drei Tripel von der Form (a, y, z) übrig geblieben, in welchen y und z gleich a oder b, aber nicht beide gleich a sind. Für diese gilt

$$\begin{aligned} (aa)b &= bb = d, & a(ab) &= ac = d; \\ (ab)a &= ca = d, & a(ba) &= ad = d; \\ (ab)b &= cb = d, & a(bb) &= ad = d. \end{aligned}$$

Wir haben für $\nu \geqq 4$ auch die Isoliertheit des Typs (a, a, a) ausgewiesen, womit der Beweis von Satz 1 beendigt ist.

§ 5. Fall $\nu = 3$ (zweiter Teil).

Im Fall $\nu = 3$ macht der Typ (a, a, a) die meisten Schwierigkeiten (der sich jetzt ganz anders verhält als im eben erledigten Fall $\nu \geqq 4$ und auch als die übrigen Typen im Fall $\nu = 3$). Hierauf bezieht sich

Lemma 2. *Sind in einer aus der Menge $S = \{a, b, c\}$ gebildeten multiplikativen Struktur alle Tripel von der Form*

$$\left.\begin{matrix} (a, a, x), & (x, a, a) \\ (a, x, a), & (x, a, x) \end{matrix}\right\} \; x = b \quad \textit{oder} \quad x = c \tag{8}$$

assoziativ, dann ist auch (a, a, a) assoziativ.

Vor dem Beweise dieses Lemmas zeigen wir, daß aus ihm und aus Lemma 1 im § 3 der folgende Satz entsteht:

Satz 2. *Für eine Menge $S = \{a, b, c\}$ mit drei Elementen enthält das System der Assoziativitätsbedingungen ein einziges unabhängiges vollständiges Teilsystem. Dieses entsteht so, daß man aus (1) die Gleichungen mit $x = y = z$ streicht.*

Nach Lemma 1 sind nämlich die von (a, a, a) verschiedenen Typen isoliert. Deshalb bilden diejenigen 24 Gleichungen in (1), für welche $x = y = z$ nicht besteht, ein unabhängiges Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen (1). Andererseits besagt das Lemma 2, daß die gesagten 24 Gleichungen ein vollständiges System der Assoziativitätsbedingungen (1) bilden.

B e w e i s v o n L e m m a 2. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind und trotzdem (a, a, a) nichtassoziativ ist. Wegen letzteres besteht einer der folgenden drei Fälle:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & (aa)a = a, & a(aa) = x \\ \text{(II)} & (aa)a = x, & a(aa) = a \end{array} \Bigg\} \quad (x = b, c)$$

$$\text{(III)} \quad (aa)a = x, \quad a(aa) = y \quad (x = b,\ y = c \quad \text{oder} \quad x = c,\ y = b).$$

Wir betrachten diese Fälle einzeln, schicken wir aber für alle drei Fälle voraus, daß nach Hilfssatz 6 $aa \neq a$ sein muß.

F a l l I. Bezeichne z das von a und x verschiedene (dritte) Element von S. Wir machen eine weitere Fallunterscheidung je nachdem $aa = x$ oder $aa = z$ ist.

Wenn $aa = x$ ist, dann gelten nach den Bedingungsgleichungen (I)

$$xa = a, \qquad ax = x.$$

Hieraus folgt

$$a(xa) = aa = x, \qquad (ax)a = xa = a;$$

wonach das Tripel (a, x, a) nichtassoziativ ist, gegen unsere Voraussetzung.

Wenn $aa = z$ ist, dann gilt nach (I)

$$za = a, \qquad az = x. \tag{9}$$

Aus (9) werden wir wieder auf die Nichtassoziativität von (a, x, a) schließen. Wegen (9) und der Voraussetzungen von Lemma 2 gilt nämlich

$$ax = a(az) = (aa)z = zz = z(aa) = (za)a = aa = z,$$
$$xa = (az)a = a(za) = aa = z.$$

Hiernach ist

$$(ax)a = za = a, \qquad a(xa) = az = x,$$

gegen die Voraussetzung.

F a l l II. Dieser Fall entsteht aus Fall I einfach durch „Dualisieren", so nämlich, daß man überall zur umgekehrten Multiplikation übergeht.

F a l l III. Wieder sind zwei Unterfälle möglich, je nachdem $aa = x$ oder $aa = y$ ist.

Wenn

$$aa = x \tag{10}$$

ist, so gilt nach (III)

$$xa = x, \qquad ax = y. \tag{11}$$

Ein Widerspruch ergibt sich so, daß wir die Nichtassoziativität von (a, a, y) zeigen. Zu diesem Zweck rechnen wir einige Produkte aus. Nach (10), (8) und (11) gilt

$$xx = x(aa) = (xa)a = xa = x. \tag{12}$$

Nach (11), (8) und (12) gilt

$$xy = x(ax) = (xa)x = xx = x. \tag{13}$$

Nach (11), (8), (10) und (12) gilt

$$ay = a(ax) = (aa)x = xx = x. \tag{14}$$

Nun folgt aus (10), (13), bzw. (14), (11)

$$(aa)y = xy = x, \qquad a(ay) = ax = y,$$

womit wir auf den gewünschten Widerspruch gestoßen sind.

Wenn $aa = y$, so läßt sich dieser Fall auf den eben erledigten wieder einfach durch Dualisieren zurückführen, was man so erkennt, daß der vorige Fall der Annahme $(aa)a = aa$, während der jetzige der (dualen) Annahme $a(aa) = aa$ gleich kommt.

Damit ist Lemma 2, also auch Satz 2 bewiesen.

§ 6. Fall $\nu = 2$.

Endlich untersuchen wir den Fall $\nu = 2$. Wir teilen die aus den Elementen der Menge $S = \{a, b\}$ gebildeten acht verschiedenen Tripel in drei Klassen ein:

C_1: (a, a, a), (a, b, a);

C_2: (b, b, b), (b, a, b);

C_3: (a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a);

und beweisen den folgenden

Satz 3. *Ist in einer aus der Menge $S = \{a, b\}$ gebildeten multiplikativen Struktur $S^\times$ je ein Tripel aus den Klassen C_1, C_2, C_3 assoziativ, so ist $S^\times$ eine Halbgruppe.* (Mit anderen Worten: im Fall $\nu = 2$ bildet jede solche Teilmenge der Assoziativitätsbedingungen ein unabhängiges vollständiges Teilsystem, die die Assoziativität je eines Tripels der Klassen C_1, C_2, C_3 vorschreibt.)

Beweis. Der Leser kann sich durch unmittelbares Ausrechnen leicht überzeugen, daß 8 unter den 16 verschiedenen multiplikativen Strukturen $S^\times$, die sich aus der Menge $S = \{a, b\}$ bilden lassen, assoziativ sind, und im Fall der übrigen 8 Strukturen die nichtassoziativen Tripel entweder alle Tripel einer der Klassen C_i $(i = 1, 2, 3)$, oder die sämtlichen verschiedenen Tripel sind. Deshalb sind für jedes $S^\times$ und für jedes C_i entweder alle Tripel von C_i assoziativ, oder alle nichtassoziativ. Das bedeutet eben die Richtigkeit von Satz 3.

(Eingegangen am 2. April 1953.)