Beweis der Hauptformel der hyperbolischen Trigonometrie unabhängig von der Stetigkeit.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

Die Hauptformel von J. BOLYAI[1]) für den hyperbolischen Raum:

$$A = \operatorname{cgt}\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

drückt das Verhältnis $A = s' : s$ zweier konzentrischen Grenzkreisbogen $s = \widehat{PR} < \widehat{P'R'} = s'$ (zwischen denselben Achsen $PP' \asymp RR'$ und im Abstand $\overline{PP'} = \overline{RR'} = a$) durch den Parallelwinkel α aus, der diesem Abstand a entspricht. Diese Formel hat auch dann einen Sinn, wenn man bei der Begründung der hyperbolischen Geometrie auf die Stetigkeitsaxiome verzichtet und die Existenz der hyperbolischen Parallelen als Axiom voraussetzt, wie es D. HILBERT[2]) getan hat. Der von J. BOLYAI[3]) bzw. N. I. LOBATSCHEFSKIJ[4]) entdeckte klassische Satz, laut welchem auf der Grenzkugel die euklidische ebene Geometrie gilt, wenn die Grenzkreise Geraden genannt werden, bleibt nämlich auch in diesem Falle bestehen (abgesehen von den Stetigkeitsaxiomen), und man kann deshalb die Hilbertsche *Streckenrechnung*[5]) auf der Grenzkugel anwenden, auf diese Weise mit den Grenzkreisbogen nach den gewöhnlichlen Gesetzen rechnen, und die Winkelfunktionen als Grenzkreisbogenverhältnisse euklidisch erklären[6]).

---

[1]) J. BOLYAI, *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens, etc.* (Marosvásárhely, 1832), besonders § 29.; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen.* II (Leipzig und Berlin, 1913), S. 197.

[2]) D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, 57 (1903), 137—150, besonders S. 139—140, oder *Grundlagen der Geometrie*, 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), Anhang III, S. 159—177, besonders S. 162.

[3]) J. BOLYAI, a. a. O.[1]), § 21; siehe P. STÄCKEL, a. a. O. S. 192—193.

[4]) Siehe F ENGEL, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, etc.*, Erster Teil (Leipzig, 1898), S. 12.

[5]) D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl., §§ 15—16.

[6]) Die so erklärten Winkelfunktionen $\sin x$ und $\cos x$ nehmen jeden Wert (d. h. jeden Grenzkreisbogen) an, der seinem Betrage nach $\leqq 1$ ist. Geht nämlich ein Grenzkreis auf der Grenzkugel durch einen inneren Punkt eines Kreises, so wird dieser Kreis von ihm in

Unsere Absicht ist die Formel (1), oder ausführlicher geschrieben

$$\frac{s'}{s} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \tag{1*}$$

auf dieser von der Stetigkeit unabhängigen Grundlage zu beweisen. Als Vorbereitung führen wir folgendes an.

Bezeichnet $p(a)$ den Grenzkreisbogen von der Höhe a und α den Parallelwinkel, der dem Abstand a gehört (Fig. 1), so zeigt eine leichte Überlegung [7]), daß

$$p(a) \operatorname{tg} \alpha = S \tag{2}$$

von a unabhängig, d. h. eine Weltkonstante ist [8]). Der Höhe a_0 dieses Grenzkreisbogens S entspricht deshalb die Hälfte des rechten Winkels als Parallelwinkel (Fig. 2). Auf Grund dieses Satzes (2) ergeben sich sogleich [9]) die

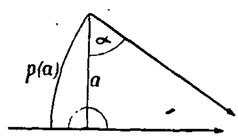

Fig. 1.

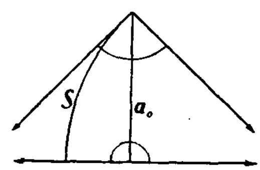

Fig. 2.

bekannten Lobatschefskijschen Grundformeln der hyperbolischen *Winkeltrigonometrie* des rechtwinkligen Dreiecks [10]). Aus diesen können sodann die vier Grundformeln der Winkeltrigonometrie des allgemeinen Dreiecks [11]) in einfacher Weise gewonnen werden [12]). Sind λ, μ, ν die Winkel des Dreiecks und α, β, γ den gegenüberliegenden Seiten a, b, c entsprechende Parallelwinkel, so lautet

zwei Punkten geschnitten, wie man sich davon leicht überzeugen kann, ohne die Stetigkeitsaxiome annehmen zu müssen. Das bedeutet mit anderen Worten, daß *in der euklidischen ebenen Geometrie der Grenzkugel (unabhängig von der Stetigkeit) auch das Kreisaxiom erfüllt ist:* hat eine Gerade einen Punkt im Innern eines Kreises, so schneidet sie den Kreis in zwei Punkten. In der euklidischen Geometrie ist das ein weiteres Axiom, wenn man die Stetigkeitsaxiome fallen läßt. Vgl. z. B. H. G. Forder, *The Foundations of Euclidean Geometry* (Cambridge, 1927), S. 134, Axiom Q_1. Die erwähnte Tatsache wird übrigens im folgenden nicht benutzt.

7) Paul Szász, Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie mit Hilfe der Grenzkugel. (Erscheint demnächst in den *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae.)* Einen anderen Beweis hat vorher V. F. Kagan gegeben, siehe die russische Ausgabe der *Geometrischen Untersuchungen etc.* von N. I. Lobatschefskij (Moskau-Leningrad, 1945), S. 130—131.

8) Der Satz ist unter Annahme der Stetigkeit (und letzten Endes lückenhaft) schon bei J. Bolyai, a. a. O.[1]), § 30, bewiesen.

9) Siehe z. B. Paul Szász a. a. O.[7]), besonders § 1.

10) Siehe F. Engel, a. a. O.[4]) S. 20, Formel (14).

11) Siehe F. Engel, a. a. O.[4]) S. 21, Formel (17), für den Beweis ebenda S. 223—225.

12) Siehe z. B. Paul Szász, A hiperbolikus trigonometriáról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 48 (1941), S. 401—409, besonders § 1.

der *Sinussatz*

(3) $$\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = \operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma,$$

während nach dem *Kotangentensatz*

(4) $$\sin\beta\sin\nu\operatorname{ctg}\lambda = -\cos\nu + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

ist.

Nun gehen wir zum Beweis der Formel (1*) über. Es seien die Höhen der Bogen $\widehat{PR} = s$, $\widehat{P'R'} = s'$ der Reihe nach $\overline{PQ} = b$, $\overline{P'Q'} = b'$, die entsprechenden Parallelwinkel β, β' (Fig. 3). Es werde ferner $QP' = c$, $\sphericalangle PQP' = \lambda$, $\sphericalangle PP'Q = \mu$, $\sphericalangle P'PQ = \nu$ gesetzt. Im Sinne von (2) is

(5) $$\frac{s'}{s} = \frac{p(b')}{p(b)} = \frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\beta}.$$

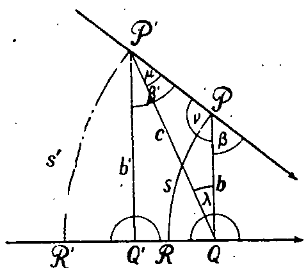

Fig. 3.

Nach (3) ist aber im Dreieck $QP'P$ (da doch Winkel ν das Supplement des Parallelwinkels β ist, also $\sin\nu = \sin\beta$ ausfällt)

$$\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\lambda},$$

während im rechtwinkligen Dreieck $QP'Q$ (da ja $\sphericalangle P'QQ'$ das Komplement von λ ist)

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\gamma} = \cos\lambda.$$

Durch Multiplikation der letzten zwei Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\alpha} = \sin\beta\operatorname{ctg}\lambda.$$

Auf Grund von (4) (wobei jetzt $\sin\nu = \sin\beta$, $\cos\nu = -\cos\beta$ ist) nimmt diese Formel die Gestalt

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$$

an. Also ist

$$\operatorname{ctg} \beta' = \operatorname{ctg} \beta \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

woraus mit Rücksicht auf (5) die beweisende Formel (1*) folgt.

Entsprechen den Abständen $a_1, a_2, a = a_1 + a_2$ der Reihe nach die Parallelwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$, so hat offenbar der eben bewiesene Satz (1*) die bekannte Funktionalgleichung von N. I. LOBATSCHEFSKIJ [13])

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

zur Folge. [14])

(Eingegangen am 6. März 1953.)

[13]) Siehe F. ENGEL, a. a. O.[4]) S. 20, Formel (11).

[14]) Aus dieser Funktionalgleichung ergibt sich bei Annahme der Stetigkeitsaxiome die klassische Formel $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{a}{k}}$ (vgl. J. BOLYAI, a. a. O.[1]), §§ 24, 29, resp. F. ENGEL, a. a. O.[4]) S. 20, Formel (12). Hierbei bedeutet k mit Rücksicht auf die obige Formel (1*) denjenigen Abstand, dem das Grenzkreisbogenverhältnis $K = e$ entspricht. Für die bekannte Tatsache, daß k gleich der Bogenlänge von S ist (F. ENGEL, Zur nichteuklidischen Geometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig.* Math.-phys. Klasse, **50** (1898), S. 181—191, besonders S. 190), haben wir einen strengen Beweis gegeben, siehe PAUL SZÁSZ, a. a. O.[7]), § 2.