Bibliographie

A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung zum Gebrauch bei akademischen Vorträgen sowie zum Selbststudium. Erster Band: Funktionen einer Variablen, XII + 373 S.; zweiter Band: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen, 482 S., Basel, Verlag Birkhäuser, 1945 und 1951.

Der Verfasser hat die recht schwierige Aufgabe unternommen, ein neues Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung zu schreiben, das fast allen denkbaren Ansprüchen genügt: als Leitfaden bei akademischen Vorlesungen dient, alle Einzelheiten dem Selbststudierenden klarmacht, den für die Anwendungen Interessierten rasch zur Behandlung des Kalküls führt und eine sichere Basis zu den weiteren Studien des jungen Mathematikers bietet. Im Bestreben diesen oft widersprechenden Forderungen zu entsprechen gibt er dem behandelten Stoffe eine von der üblichen in mehreren Punkten abweichende Anordnung, faßt die Gedankengänge — besonders im ersten Bande — sehr ausführlich und fügt zu jedem Kapitel eine Reihe von leichteren und schierigeren Aufgaben. Diese Umstände machen den verhältnismäßig erheblichen Umfang des Buches verständlich.

Nach einer Einleitung über das Wesen der Mathematik findet man die axiomatische Einführung der reellen Zahlen und einige Folgerungen aus den Axiomen, sowie einige Erläuterungen über den Funktionsbegriff. Dann folgt die Theorie der Grenzwerte, und zwar zuerst die des Grenzwerts von Zahlenfolgen und dann die des Grenzwerts von Funktionen. Nun wird der Begriff einer stetigen Funktion erklärt; die gleichmäßige Stetigkeit, die Existenz des Maximums und Minimums und der Satz von den Zwischenwerten werden ohne Beweis behauptet, die Beschränktheit wird aus der gleichmäßigen Stetigkeit gefolgert. Dann werden die grundlegenden Eigenschaften der aus der Geometrie als bekannt vorausgesetzten trigonometrischen Funktionen zusammengefaßt.

Das folgende Kapitel behandelt die Definition und die Eigenschaften des bestimmten Integrals von stetigen Funktionen; dann folgt die Einführung der Ableitung und der Zusammenhang zwischen beiden Operationen und erst im nächsten Kapitel lernen wir die Technik des Differenzierens, den Begriff der Umkehrfunktion, die Funktion $\sqrt[n]{x}$ und die Kettenregel kennen. Nun folgt ein Kapitel über die Technik des Integrierens, in welchem die Funktion $\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ und ihr Umkehrfunktion e^x eingeführt sind. Das letzte Kapitel des ersten Bandes enthält die Diskussion von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen und die Taylorsche Formel nebst der Potenzreihenentwicklungen elementarer Funktionen.

Der zweite Band beginnt mit einer mengentheoretischen Einführung, in welchem aus der abstrakten Mengenlehre der Begriff der Abzählbarkeit, aus der Theorie der Punktmengen im n-dimensionalen Raum aber verhältnismäßig viel behandelt wird. Es ist zu bedauern, daß statt beider üblichen Zeichen $\in$ und $\subset$ das Zeichen $\prec$ angewandt wird. Dann folgen die Begriffe des Grenzwerts und der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen; die im ersten Bande ohne Beweis behaupteten Haupteigenschaften werden nun — unter allgemeineren Voraussetzungen — bewiesen. Das nächste Kapitel enthält die Theorie der numerischen und Funktionenreihen, besonders die der Potenzreihen und, als Anwendung, den WEIERSTRASS'schen Approximationssatz. Im folgenden Kapitel über Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen steht leider der STOLZ'sche Differenzierbarkeitsbegriff im Hintergrund, meist wird statt dessen die Stetigkeit der partiellen Ableitungen angenommen. Zu erwähnen ist die glückliche Anwendung des Begriffs der gleichmäßigen Differenzierbarkeit, der z. B. im Beweise des YOUNG'schen Satzes über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen gute Dienste leistet und eine leichte Verallgemeinerung seiner üblichen Fassung ermöglicht.

Die übrigen Kapitel behandeln die Theorie der impliziten Funktionen und Funktionensysteme sowie der Extremen von Funktionen mehrerer Variablen, die numerischen Methoden der Interpolation, der Integration und der angenäherten Lösung von Gleichungen, endlich die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume und einiges aus der Flächentheorie.

Obwohl die Anordnung des Stoffes im Buche, besonders im ersten Bande, aus pädagogischen Gründen manchmal bestreitbar ist, stellt das Werk von Ostrowski einen bedeutenden Gewinn der mathematischen Literatur dar. Als seine Vorteile müssen wir in erster Linie die klaren und präzisen Definitionen, die ausführlichen Gedankengänge und vor allem die im großen Teil aus unpublizierten Aufgaben bestehende Aufgabensammlung erwähnen, die nicht nur dem Studierenden, sondern auch dem Fachmann recht viel Neues und Interessantes bietet. Man erwartet mit großem Interesse das Erscheinen des dritten Bandes.

Ákos Császár.

Leonard M. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry, XI + 347 pages, Oxford, Clarendon Press, 1953.

Die Topologie, d. h. das Studium der Invarianten der homöomorphen Abbildungen entwickelte sich in unserem Jahrhundert zu einem fundamentalen Kapitel der Geometrie. Es wäre jedoch ganz unberechtigt neben den Invarianten der Homöomorphismen das Studium der Invarianten der isometrischen, d. h. abstandstreuen Abbildungen zu leugnen. Im Gegenteil, eben die Entwicklung der Topologie wies darauf hin, daß nur die gemeinsame Betrachtung der Invarianten isometrischer und homöomorpher Abbildungen den stufenweisen Aufbau der klassischen Geometrien im Rahmen des abstrakten Raumbegriffes ermöglicht. In seien Arbeiten: „Untersuchungen über allgemeine Metrik" und „Zur Metrik der Kurven" (*Math. Annalen,* **100** (1928), 75—163, **103** (1930), 466—501) hat K. Menger den Weg zur systematischen Untersuchung der isometrischen invarianten metrischer und halbmetrischer Räume gebahnt und auch einige wichtige Resultate erzielt. Darauf folgend entwickelte sich dieses Studium zu einem zusammenhängenden Kapitel der Geometrie, worüber schon früher einige zusammenfassende Arbeiten erschienen, wie die „Distance Geometries" (*The University of Missouri Studies,* **13** (1938), 1—142) des Verf., und „Les méthodes directes en géométrie différentielle" (*Actualités scientifiques et industrielles,* N° 886. Paris, 1941) von C. Pauc. Auch die wohlbekannten Untersuchungen von A. D. Alexandrow über konvexe Körper, oder die Arbeiten von K. Menger über Variationsrechnung stehen in engster Beziehung zu dieser Theorie.

Nach alledem kann man nur mit Freude begrüßen, daß sich Verf., dem ja dieses Kapitel der Geometrie manche Resultate verdankt, zur Veröffentlichung eines Werkes entschlossen hat, in welchem der heutige Stand der „Abstandsgeometrie" bis zu einem gewissen, selbst den Forscher interessierenden Grad samt Beweismethoden systematisch dargestellt werde.

Das Buch besteht aus vier Teilen. Der erste Teil (Metric Spaces) beschäftigt sich mit den Grundbegriffen, insbesondere mit dem abstrakt-metrischen Begriff der Konvexität und mit der metrischen Theorie der Kurven. Der zweite Teil (Euclidean and Hilbert Spaces) befaßt sich mit der isometrischen Einbettung halbmetrischer und metrischer Räume in den Euklidischen und Hilbertschen Raum. Im dritten Teil wird das analoge Einbettungsproblem in den elliptischen und hyperbolischen Raum behandelt. Im vierten Teil (Applications of Distance Geometry) werden Anwendungen der Abstandsgeometrie auf die Determinantentheorie, lineare Ungleichungen und Latticetheorie gebracht.

Verf. sucht sein Thema so darzustellen, daß das Verständnis des Stoffes auch für den Universitätshörer zugänglich sei. Die Beweise sind meistens genau durchgeführt und auch der Zusammenhang zwischen den ohne Beweis angeführten Sätzen ist oft durch gelungene Bemerkungen hergestellt. Es ist besonders zu begrüßen, daß Verf. das tiefere Eindringen in die Denkart der Abstandsgeometrie durch Beispiele und Übungsaufgaben unterstützt.

Trotz dieser Verdienste des Werkes sind sowohl die Stoffauswahl, wie auch die Darstellungsweise und die Litteraturangaben in mancher Hinsicht mangelhaft. Zuerst ist es nicht ganz begreiflich, weshalb Verf. die Verwendung topologischer Begriffe, wie Kontinuum, lokaler Zusammenhang, u. dgl. selbst dann vermeidet, wenn dadurch das Wesen des behandelten Stoffes verdeckt wird und der Zusammenhang mit bekannteren Teilen der Geometrie verloren geht. Diese konsequente Vermeidung der topologischen Begriffsbildungen verursacht dann eine recht einseitige Auswahl des Stoffes. So wird z. B. den von Menger vermutete, aber erst neulich bewiesene fundamentale Satz, laut welchem ein lokal zusammenhängendes Kontinuum konvex metrisiert werden kann, auf S. 58 nur unter den „Supplementary Papers“ ganz flüchtig erwähnt, obwohl die Konvexität der zentrale Begriff des ganzen Buches ist. Es ist ganz unverständlich, daß als Verfasser dieses Satzes nur R. H. Bing erwähnt wird, E. E. Moise dagegen überhaupt nicht, obwohl sein Beweis in demselben Heft des *Bulletin Amer. Math. Soc.* unmittelbar nach der Bingschen Arbeit gedruckt wurde. Es scheint ebenfalls nicht an der Stelle zu sein, den wichtigen Satz über die Einbettbarkeit der separablen metrischen Räume in das Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes auf S. 31 ohne Benennung von Urysohn anzuführen. Referent ist der Meinung, daß der Name Urysohn aus einem Buche, dessen alleiniges Thema der metrische Raum ist, kaum fehlen darf.

Die am besten gelungenen Teile des Buches sind die Kapitel IV—XII, in welchen die Einbettungsprobleme behandelt werden. Tatsächlich hat Verfasser — nebst Menger — auf diesem Gebiet das Meiste geleistet und das ist vielleicht der Grund, daß er diese Teile am besten darzustellen vermochte. Weniger befriedigend ist die Stoffauswahl und die Darstellungsweise des Kapitels III über die metrische Theorie der Kurven. Zunächst wird die Theorie der metrischen Krümmung bis in die kleinsten Einzelheiten ausgeführt. Dem folgt ein kurzer, aber gut leserlicher Paragraph über die metrische Torsion. Hier bemüht sicht aber Verf. viel weniger, als bei der Behandlung der Krümmung, den Stand der Theorie und den Anteil der verschiedenen Autoren an ihrer Entstehung zu schildern. So z. B. wird der Satz, laut welchem zwei Bogen des dreidimensionalen E_3 isometrisch sind, wenn sie aufeinander derart längentreu abgebildet werden können, daß sie in entsprechenden Punkten dieselbe (nicht verschwindende) Krümmung und Torsion haben, nur in einer Fußnote auf S. 88, als von J. W. Gaddum in seiner Inauguraldissertation rein metrisch bewiesen, erwähnt. Ist der Beweis von Gaddum richtig, so sollte er im Buch wenigstens angedeutet sein, da dieser Satz für die Abstandsgeometrie der Kurven von großer Bedeutung ist; allerdings von viel größerer Bedeutung als ein im Text vorgeführter Satz von A. Wald, welcher zwar in der metrischen Theorie der Flächen eine große Rolle spielt, mit der Kurventheorie aber überhaupt nichts zu tun hat. Es ist auch merkwürdig, daß die wichtigen Resultate von E. Egerváry über die n-te Bogenkrümmung ganz unbeachtet blieben, wodurch die Abstandsgeometrie der Kurven bedeutend ärmlicher ausschaut, als sie es in Wirklichkeit ist. Als weitere litterarische Unsicherheit des Verf. sei erwähnt, daß er auf S. 87 einen Satz J. W. Sawyer zuschreibt, obwohl der betreffende Satz sogar in weiterem Umfang schon viel früher in einer, auf. S. 88 vom Verf. selbst in anderem Zusammenhang zitierten Arbeit des Referenten bewiesen wurde.

Es kann auch nicht unbemerkt bleiben, daß die Definitionen des Buches unter einem recht sonderlichen Gesichtspunkt zusammengestellt wurden. Es ist z. B. merkwürdig, daß der Sinn eines so wohlbekannten Begriffes, wie "Topology" in der Definition 10.6 auf S. 31 eigens erklärt ist, wogegen der sehr wichtige Begriff der Konvexität nach Außen, auf welchem ja ein großer Teil des Werkes beruht, weder in den Definitionen, noch im

Sachregister zu finden ist, sondern nur im Text, auf S. 55 zwischen den Zeilen erklärt wird. Ähnliche Fälle, wo triviale Dinge hervorgehoben, recht wichtige aber ziemlich verwischt erscheinen, könnte man noch viele erwähnen.

Im Großen und Ganzen hat Verf. dadurch, daß er diesen, vielleicht noch nicht genügend bekannten Zweig der Geometrie darzustellen versuchte, gute Dienste geleistet und sein Buch kann, trotz der erwähnten Schwächen, mit Nutzen gelesen werden. Es ist nur Schade, daß die sehr einseitige Stoffauswahl und die unausgeglichene Darstellungsweise der Verbreitung dieser schönen geometrischen Theorie weit nicht so viel nützen wird, als sie es wegen ihrer Tiefe und Allgemeinheit verdienen würde.

G. Alexits.

Ludwig Schläfli, Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Band II, 381 Seiten. Herausgegeben vom Steiner—Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Basel, Verlag Birkhäuser, 1953.

Der Band fängt mit einer größeren Arbeit über die Auflösung eines Systems von algebraischen Gleichungen an, die SCHLÄFLI früh den Ruhm eines hervorragenden Mathematikers erwarb. In dieser Arbeit treten die typischen Züge, die SCHLÄFLIS Werke im allgemeinen charakterisieren, schon deutlich hervor, insbesondere das Bestreben nach einer natürlichen, das Wesen der Sache erfassenden Verallgemeinerung der Probleme und Ergebnisse. Der Arbeit ist ein ausführliches Nachwort von BURCKHARDT und VAN DER WAERDEN beigefügt.

Zwei weitere Abhandlungen enthalten Teilergebnisse seiner klassischen Theorie der vielfachen Kontinuität, die vor der Fertigstellung dieses großartigen Werkes veröffentlicht wurden. Die erste behandelt, an Untersuchungen von JACOBI anschließend, die Eigenschaften der geodätischen Linien eines Ellipsoids im n-dimensionalen Raum; die zweite bezieht sich auf die äußerst interessante Frage der Bestimmung des Inhaltes eines Tetraeders in Räumen konstanter Krümmung. Diese Frage hat schon GAUSS und J. BOLYAI beschäftigt, wurde aber erst durch LOBATSCHEFSKIJ bzw. SCHLÄFLI durch die Einführung und Diskussion der von ihnen bekannten Funktionen gelöst.

Die zu Lebzeiten SCHLÄFLIS veröffentlichten, hier abgedruckten Auszüge aus der Theorie der vielfachen Kontinuität enthalten den interessantesten Teil des gennanten Werkes, nämlich die Theorie der regulären Polytope, auf Grund der Schläflischen Funktionen. SCHLÄFLIS diesbezüglichen Untersuchungen wurden durch zahlreichen Mathematikern weitergeführt.

Weiter finden wir in diesem Band die beiden, durch die Berliner Akademie mit dem Steiner-Preis ausgezeichneten Abhandlungen über die Flächen dritter Ordnung mit der berühmten Konfiguration des Doppelsechsers und der Klassifikation dieser Flächen. Die übrigen Arbeiten des vorliegenden Bandes zeigen, daß SCHLÄFLI auch in der Analysis, in der Lehre der quadratischen Formen und in den Anwendungen der Determinantentheorie an die mehrdimensionale Geometrie tätig war.

Wir schauen mit Erwartung dem Erscheinen des dritten Bandes gegenüber, der uns zur Verschaffung eines vollständigen Bildes von SCHLÄFLIS Lebenswerk verhelfen wird.

L. Fejes Tóth.

Engedélyezési szám: 876/T/47 VII. 23.

Formátum B/5. Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla.
Terjedelem 7,7 A/5 ív. Nyomdábaadás ideje: 1953. III. 28.
Példányszám 520. Megjelenés: 1953. VIII. 15.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, II., Frankel Leó-u. 38—40.
Kiadásért felel a Tankönyvkiadó vállalat vezérigazgatója.

Felelős vezető: Vincze György