Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Introduction.

Dans une Note récente [1]) je viens de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Si T est une contraction de l'espace de Hilbert complexe H,* [2]) *il existe un espace de Hilbert complexe $\boldsymbol{H}$ contenant H comme un sous-espace, et une transformation unitaire $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{H}$, de sorte que, en désignant par $\boldsymbol{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace H, on ait*

$$T^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^k, \quad (T^*)^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^{-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$ [3])

Théorème II. *Si les contractions T_t $(0 \leqq t < \infty)$ de l'espace de Hilbert complexe H forment un semi-groupe (fortement) continu de transformations, c'est-à-dire que*

$$T_0 = I, \quad T_s T_t = T_{s+t}, \quad T_s \to T_t \text{ pour } s \to t,$$

il existe un espace de Hilbert complexe $\boldsymbol{H}$ contenant H comme un sous-espace, et un semi-groupe (fortement) continu de transformations unitaires $\boldsymbol{U}_t$ de $\boldsymbol{H}$, de sorte que, en désignant par $\boldsymbol{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace H, on ait

$$T_t = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t, \quad T_t^* = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t^{-1} \qquad (0 \leqq t < \infty).$$ [4])

Dans la démonstration de ces théorèmes j'ai fait usage de certains théorèmes des moments, d'un théorème de NEUMARK sur les familles spectrales

---

[1]) BÉLA SZ.-NAGY, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *ces Acta*, 15 (1953), 87—92.

[2]) Par contraction nous entendons une transformation linéaire qui n'augmente pas les normes.

[3]) Ces équations, et leurs analogues dans la suite, doivent être entendues dans le sens que les transformations figurant aux deux membres sont égales lorsqu'elles sont appliqués aux éléments de l'espace originel H.

[4]) Dans le cas particulier des transformations T_t *isométriques,* ce théorème a été démontré déjà par J. L. B. COOPER dans son article: One-parameter semigroups of isometric operators in Hilbert space, *Annals of Math.*, 48 (1947), 827—842.

généralisées, et de théorèmes de HILLE sur la transformation "infinitésimale"

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T_h - I)$$

du semi-groupe $\{T_t\}$, et sur sa résolvante $(zI - A)^{-1}$.

Dans la Note présente je vais donner une démonstration qui ne fait usage d'aucun des théorèmes mentionnés et qui de plus sera valable aussi pour des espaces de Hilbert *réels*[5]). Dans le théorème II, il nous suffira de supposer que T_t est une fonction *faiblement* continue de t; nous obtiendrons alors U_t aussi en fonction faiblement continue de t, mais comme U_t est unitaire, cela entraîne sa continuité forte[6]), et de la représentation trouvée il s'ensuivra que T_t est aussi fonction fortement continue de t.[7])

Nous montrerons de plus que, dans ces théorèmes, on peut exiger que $\boldsymbol{H}$ soit *minimal* dans le sens qu'il soit sous-tendu, selon les cas, par les éléments de la forme $\boldsymbol{U}^k f$ $(f \in H; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ et par les éléments de la forme $\boldsymbol{U}_t f$ ou $\boldsymbol{U}_t^* f$ $(f \in H; t \geqq 0)$. Dans ce cas, $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{U}$, respectivement $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{U}_t$, sont *déterminés* à une isomorphie près.

Notre démonstration passera par un théorème sur des transformations qui sont fonctions de type positif, définies sur un groupe.

D é f i n i t i o n. Nous dirons que la transformation linéaire bornée T de l'espace de Hilbert H (réel ou complexe), dépendant de l'élément variable γ d'un groupe Γ, est une *fonction de type positif* sur Γ, si l'on a

$$\sum_{\delta, \gamma \in \Gamma} (T_{\delta^{-1}\gamma} g_\gamma, g_\delta) \geqq 0 \tag{1}$$

pour toute famille $\{g_\gamma\}$ d'éléments de H telle que $g_\gamma = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments γ de Γ au plus, et si de plus

$$T_{\gamma^{-1}} = T_\gamma^*.\text{[8])} \tag{2}$$

T h é o r è m e III. *Supposons que la transformation linéaire bornée T_γ de l'espace de Hilbert H (réel ou complexe) est une fonction de type positif de l'élément variable γ d'un groupe topologique Γ, et que cette fonction est faiblement continue, c'est-à-dire que $(T_\gamma f, g)$ est, pour tout couple fixé f, g d'éléments de H, fonction continue de γ; de plus soit*

$$T_\varepsilon = I \quad (\varepsilon \text{ est l'élément unité du groupe } \Gamma). \tag{3}$$

---

[5]) Dans l'espace de Hilbert réel, ainsi que dans celui complexe, nous appellerons *unitaire* une transformation linéaire isométrique qui transforme l'espace sur l'espace tout entier.

[6]) En effet, si $t \to s$, on a

$$\|U_t f - U_s f\|^2 = 2\|f\|^2 - (U_t f, U_s f) - (U_s f, U_t f) \to 2\|f\|^2 - 2(U_s f, U_s f) = 0.$$

[7]) Cf. E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948), Theorem 9. 4. 1, p. 189.

[8]) Dans un espace H complexe, (2) est une conséquence de (1).

Alors il existe, dans un certain espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ *contenant* H *comme sous-espace, une famille* $\{U_\gamma\}$ *de transformations unitaires formant une représentation (fortement) continue du groupe* Γ, *telle qu'on ait*

$$T_\gamma = \boldsymbol{P} U_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma) \tag{4}$$

où $\boldsymbol{P}$ *désigne la projection orthogonale sur le sous-espace* H. *De plus on peut exiger que* $\boldsymbol{H}$ *soit minimal dans le sens qu'il soit sous-tendu par les éléments de la forme* $U_\gamma f$ $(f \in H; \gamma \in \Gamma)$; *dans ce cas* $\boldsymbol{H}$ *et* U_γ *sont déterminés à une isomorphie près.*

Ce théorème peut être regardé comme une généralisation d'un théorème de GELFAND et RAÏKOV[9]) affirmant que pour toute fonction $p(\gamma)$, à valeurs *numériques*, définie sur le groupe topologique Γ, continue et de type positif dans le sens ordinaire, il existe une représentation continue de Γ par des transformations unitaires U_γ d'un certain espace de Hilbert H, de sorte qu'on ait

$$p(\gamma) = (U_\gamma f_0, f_0)$$

où f_0 est un élément fixé de H; on peut exiger que H soit sous-tendu par les éléments $U_\gamma f_0$ $(\gamma \in \Gamma)$, H et U_γ sont alors déterminés à une isomorphie près.

Les théorèmes I et II dérivent, moyennant deux lemmes, du théorème III, en y prenant pour Γ, selon les cas, le groupe additif des nombres entiers avec la topologie discrète, ou le groupe additif des nombres réels avec sa topologie naturelle.

Nous montrerons comment le théorème de NEUMARK dérive du théorème III, et dans le dernier paragraphe nous démontrerons une extension partielle du théorème I au cas des contractions d'un espace de Banach quelconque.

2. Deux lemmes.

Lemme 1. *Soit* T *une contraction de l'espace de Hilbert* H *(réel ou complexe). En posant*

$$T_n = T^n \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad T_n = (T^*)^{|n|} \quad (n = -1, -2, \ldots),$$

nous obtenons une suite de transformations, infinie dans les deux sens, telle que $T_{-n} = T_n^*$, $T_0 = I$, *et jouissant de la propriété que*

$$\sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T_{n-m} g_n, g_m) \geqq 0 \tag{5}$$

pour toute suite $\{g_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *d'éléments de* H *telle que* $g_n = 0$ *sauf pour un nombre fini d'indices* n *au plus; donc* T_n *est une fonction de type positif sur le groupe additif des entiers* n.

---

[9]) Cf. I. GELFAND—D. RAÏKOV, Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups, *Recueil math. (Mat. Sbornik)*, N. S. 13 (1943), 301—316 (en russe, avec un résumé en anglais); cf. aussi R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Transactions American Math. Soc.*, 63 (1948), 1—84, en particulier 21—22.

D é m o n s t r a t i o n. Envisageons d'abord le cas d'un espace H *complexe*. Posons, pour $0 \leqq r < 1$ et $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$,

$$T(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} T_n;$$

vu que $\|T_n\| \leqq 1$, cette série converge en norme. En posant $z = re^{i\theta}$ on voit que

$$T(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) + \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n T^{*n}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) = \operatorname{Re}(I + zT)(I - zT)^{-1}.\text{[10]}$$

Par conséquent on a, en posant

$$g = (I - zT)^{-1} f,$$

$$(T(r, \theta) f, f) = \operatorname{Re}((I + zT)(I - zT)^{-1} f, f) = \operatorname{Re}((I + zT)g, (I - zT)g) =$$
$$= \operatorname{Re}[(g, g) + z(Tg, g) - \bar{z}(g, Tg) - z\bar{z}(Tg, Tg)] =$$
$$= \|g\|^2 - |z|^2 \|Tg\|^2 \geqq 0,$$

puisque $|z| < 1$ et $\|T\| \leqq 1$. Comme cela est vrai pour tous les éléments f de H, on a en particulier

$$p(r, \theta) = (T(r, \theta) g(\theta), g(\theta)) \geqq 0 \tag{6}$$

où

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} g_n,$$

$\{g_n\}$ étant une suite d'éléments de H telle que $g_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices n au plus. En introduisant les séries de $T(r, \theta)$ et de $g(\theta)$, on voit que

$$p(r, \theta) = \sum_{k, m, n=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{i(k+m-n)\theta} (T_k g_n, g_m) =$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\theta} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} r^{|l+n-m|} (T_{l+n-m} g_n, g_m),$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \theta)\, d\theta = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} r^{|n-m|} (T_{n-m} g_n, g_m).$$

En vertu de l'inégalité (6) on a donc

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} r^{|n-m|} (T_{n-m} g_n, g_m) \geqq 0.$$

Faisant tendre r vers 1, il en résulte l'inégalité (5). C. q. f. d.

---

[10]) On pose, pour une transformation linéaire A quelconque, $\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*)$. On a alors $((\operatorname{Re} A) f, f) = \frac{1}{2}[(Af, f) + (f, Af)] = \operatorname{Re}(Af, f)$.

Le cas d'un espace H *réel* peut être réduit à celui d'un espace complexe, et cela en introduisant l'espace H_c des couples $\{g, h\}$ d'éléments de H, muni des opérations fondamentales suivantes:

$$\{g, h\} + \{g', h'\} = \{g + g', h + h'\},$$

$$(a + ib)\{g, h\} = \{ag - bh, bg + ah\} \qquad (a \text{ et } b\text{: nombres réels}),$$

$$(\{g, h\}, \{g' h'\}) = (g, g') + (h, h') + i(h, g') - i(g, h'),$$

$$\|\{g, h\}\|^2 = (\{g, h\}, \{g, h\}) = \|g\|^2 + \|h\|^2;$$

H_c est un espace de Hilbert complexe. La transformation

$$\overline{T}\{g, h\} = \{Tg, Th\}$$

est alors une contraction de H_c; on a évidemment $T^*\{g, h\} = \{T^*g, T^*h\}$, donc aussi

$$\overline{T}_n\{g, h\} = \{T_n g, T_n h\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Or l'inégalité (4) étant démontrée déjà pour les espaces complexes, on aura

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} (\overline{T}_{n-m} \varphi_n, \varphi_m) \geqq 0$$

pour $\varphi_n = \{g_n, h_n\}$ (g_n et h_n s'annulant sauf pour un nombre fini d'indices n au plus). Si $h_n = 0$ pour tous les n, on a

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} (\overline{T}_{n-m} \varphi_n, \varphi_m) = \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} (T_{n-m} g_n, g_m),$$

ce qui achève la démonstration de (5) aussi dans le cas d'un espace H réel.

Lemme 2. *Soit* $\{T_t\}$ ($0 \leqq t < \infty$) *une famille de contractions de l'espace de Hilbert H (réel ou complexe), formant un semi-groupe faiblement continu, c'est-à-dire supposons que*

$$T_0 = I, \quad T_s T_t = T_{s+t} \qquad (s, t \geqq 0)$$

et que $(T_t f, g)$ *est une fonction continue de* t ($0 \leqq t < \infty$), *quels que soient les éléments fixés f et g de H. Alors, en posant*

$$T_t = T_{-t}^* \quad pour \quad t < 0,$$

T_t *sera une fonction faiblement continue sur la droite* $-\infty < t < \infty$, *de plus on aura*

$$\sum_{s, t = -\infty}^{\infty} (T_{t-s} g_t, g_s) \geqq 0$$

pour toute famille $\{g_t\}$ ($-\infty < t < \infty$) *d'éléments de H telle que* $g_t = 0$ *sauf pour un nombre fini de valeurs de t au plus; T_t sera donc une fonction faiblement continue et de type positif sur le groupe additif des nombres réels.*

Démonstration. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_N$ les valeurs de t pour lesquelles $g_t \neq 0$. Choisissons les nombres rationnels

$$t_{r\nu} \qquad (r = 1, 2, \ldots, N; \ \nu = 1, 2, \ldots)$$

de façon que

$$t_r = \lim_{\nu\to\infty} t_{r\nu} \qquad (r=1,2,\dots,N).$$

Puisque T_t est une fonction faiblement continue de t $(-\infty<t<\infty)$, on aura, en posant $f_r = g_{t_r}$ $(r=1,2,\dots,N)$,

$$(7) \qquad \sum_{s,t=-\infty}^{\infty}(T_{t-s}g_t,g_s)=\sum_{m,n=1}^{N}(T_{t_n-t_m}f_n,f_m)=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m,n=1}^{N}(T_{t_{n\nu}-t_{m\nu}}f_n,f_m).$$

Pour ν fixé, les nombres rationnels $t_{r\nu}$ $(r=1,\dots,N)$ sont commensurables, c'est-à-dire qu'on peut les écrire sous la forme

$$t_{r\nu}=\tau_{r\nu}d_\nu$$

avec un $d_\nu>0$ et des entiers $\tau_{r\nu}$. On a alors

$$T_{t_{n\nu}-t_{m\nu}}=(T_{d_\nu})^{\tau_{n\nu}-\tau_{m\nu}} \text{ pour } \tau_{n\nu}\geqq\tau_{m\nu}, \text{ et } =(T^*_{d_\nu})^{\tau_{m\nu}-\tau_{n\nu}} \text{ pour } \tau_{n\nu}\leqq\tau_{m\nu},$$

donc

$$(8) \qquad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(T_{t_{n\nu}-t_{m\nu}}f_n,f_m)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(T^{(\nu)}_{\tau_{n\nu}-\tau_{m\nu}}f_n,f_m)$$

où $T^{(\nu)}=T_{d_\nu}$. Or, puisque $T^{(\nu)}$ est une contraction, il s'ensuit du lemme I que le second membre de (8) est non-négatif, et alors, grâce à (7), on aura aussi

$$\sum_{s,t=-\infty}^{\infty}(T_{t-s}g_t,g_s)\geqq 0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

En vertu de ces deux lemmes, les théorèmes I et II sont des conséquences du théorème III. Nous allons démontrer celui-ci dans le paragraphe suivant.

3. Démonstration du théorème III.

Désignons par $\boldsymbol{F}$ l'ensemble des familles

$$\mathfrak{f}=\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

d'éléments $f_\gamma\in H$; nous appellerons f_γ le composant d'indice γ de $\mathfrak{f}$, et nous écrirons

$$f_\gamma=(\mathfrak{f})_\gamma.$$

En écrivant $\mathfrak{f}=0$ si et seulement si $f_\gamma=0$ pour tous les γ, et en définissant l'addition et la multiplication par des scalaires c (réels ou complexes suivant que H est réel ou complexe) par

$$\{f_\gamma\}+\{f'_\gamma\}=\{f_\gamma+f'_\gamma\}, \quad c\{f_\gamma\}=\{cf_\gamma\},$$

$\boldsymbol{F}$ devient un ensemble vectoriel (réel ou complexe, selon les cas).

Envisageons le sous-ensemble $\boldsymbol{H}_0$ de $\boldsymbol{F}$, évidemment linéaire, des $\mathfrak{f}=\{f_\gamma\}$ pour lesquels il existe un $\mathfrak{g}=\{g_\gamma\}\in\boldsymbol{F}$, n'ayant qu'un *nombre fini de composants g_γ non nuls,* et tel qu'on ait

$$f_\gamma=\sum_{\delta\in\Gamma}T_{\gamma^{-1}\delta}g_\delta$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$; nous écrirons alors:

$$\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}.$$

Dans $\boldsymbol{H}_0$, nous définissons une forme binaire qui aura, nous le montrerons, toutes les propriétés d'un produit scalaire; soit notamment, pour $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$,

$$(9) \qquad (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_{\gamma} (f_\gamma, g'_\gamma) = \sum_{\gamma, \delta} (T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta, g'_\gamma) =$$

$$(10) \qquad = \sum_{\gamma, \delta} (g_\delta, T_{\delta^{-1}\gamma} g'_\gamma) = \sum_{\delta} (g_\delta, f'_\delta)$$

(on a fait usage ici de ce que $T_{\alpha^{-1}} = T^*_\alpha$). De (9) on voit que $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ ne dépend pas du choix particulier de $\mathfrak{g}$ dans la représentation de $\mathfrak{f}$, et de (10) on voit qu'il ne dépend pas du choix particulier de $\mathfrak{g}'$, donc il est entièrement déterminé par $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$. On voit de plus que, dans le cas réel, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ est une forme bilinéaire, symétrique en $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$, tandis que dans le cas complexe elle est linéaire en , conjuguée-linéaire en $\mathfrak{f}'$, et hermitienne: $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \overline{(\mathfrak{f}', \mathfrak{f})}$. Enfin, T_γ étant une fonction de type positif de γ (cf. (1)), on a

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \geqq 0.$$

Il ne reste donc qu'à montrer que le signe d'égalité n'est valable ici que si $\mathfrak{f} = 0$. Or il s'ensuit des propriétés déjà établies de $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ que l'inégalité de Schwarz est vérifiée:

$$|(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')|^2 \leqq (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}').$$

En vertu de celle-ci, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = 0$ entraîne $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 0$ pour tous les $\mathfrak{f}' \in \boldsymbol{H}_0$. En choisissant en particulier $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$ de sorte que tous les composants de $\mathfrak{g}'$ s'annulent sauf celui d'indice α, il résulte que

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = (f_\alpha, g) = 0$$

où $f_\alpha = (\mathfrak{f})_\alpha$, et où $g = (\mathfrak{g}')_\alpha$ peut être un élément quelconque de H. Par conséquent $f_\alpha = 0$; et comme cela est vrai pour tout α, il résulte que $\mathfrak{f} = 0$.

La forme $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ jouissant donc de toutes les propriétés d'un produit scalaire, $\boldsymbol{H}_0$ est un espace de Hilbert, en général incomplet, par rapport à ce produit scalaire. Soit $\boldsymbol{H}$ le complété de $\boldsymbol{H}_0$.

L'espace originel H peut être regardé comme un sous-espace fermé de $\boldsymbol{H}$, voire même de $\boldsymbol{H}_0$, et cela en identifiant l'élément $f \in H$ avec l'élément $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$ pour lequel $(\mathfrak{g})_\varepsilon = f$ et $(\mathfrak{g})_\gamma = 0$ $(\gamma \neq \varepsilon)$, c'est-à-dire en identifiant

$$f \in H \quad \text{avec} \quad \mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\} \in \boldsymbol{H}_0.$$

Cela est légitimé par le fait que, pour deux éléments quelconques f et f' de H, et pour les éléments $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ de $\boldsymbol{H}_0$ qu'on leur a fait correspondre, on a

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = (f, f').$$

Calculons la projection orthogonale $\boldsymbol{P}\mathfrak{f}$ d'un élément $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{H}_0$ sur le sous-espace fermé H de $\boldsymbol{H}$! Comme on doit avoir, pour tous les $h \in H$,

$$(\boldsymbol{P}\mathfrak{f}, h) = (\mathfrak{f}, h),$$

donc

$$(P\mathfrak{f}, h) = ((\mathfrak{f})_\varepsilon, h),$$

on a nécessairement

$$(11) \qquad P\mathfrak{f} = (\mathfrak{f})_\varepsilon.$$

α étant un élément donné de Γ, posons

$$U_\alpha\{f_\gamma\} = \{f_{\alpha^{-1}\gamma}\};$$

c'est une transformation de H_0 en H_0, puisque si $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, on a

$$f_{\alpha^{-1}\gamma} = \sum_\delta T_{\gamma^{-1}\alpha\delta} g_\delta = \sum_\eta T_{\gamma^{-1}\eta} g_{\alpha^{-1}\eta},$$

donc $U_\alpha \mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}^\alpha$ avec $\mathfrak{g}^\alpha = \{g_{\alpha^{-1}\gamma}\}$. U_α transforme H_0 en H_0 tout entier, et cela évidemment d'une manière linéaire et biunivoque. De plus, U_α est *isométrique:* si $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, on a

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, U_\alpha \mathfrak{f}') = \sum_\gamma (f_{\alpha^{-1}\gamma}, g'_{\alpha^{-1}\gamma}) = \sum_\eta (f_\eta, g'_\eta) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}').$$

U_α se prolonge alors par continuité en une transformation isométrique de l'espace H sur l'espace H tout entier, donc en une transformation unitaire de H.

On a évidemment

$$U_\varepsilon = I, \quad U_\alpha U_\beta = U_{\alpha\beta},$$

d'abord dans H_0, et alors aussi en H. Les U_α forment donc une représentation unitaire du groupe Γ. Cette représentation est faiblement continue, c'est-à-dire que

$$(12) \qquad (U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$$

est une fonction continue de α, quels que soient les éléments $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ fixés de H. Vu que H_0 est dense dans H et que les U_α sont uniformément bornées (par 1), il suffit d'envisager les éléments de H_0. Or, si $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, on a

$$(U_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_{\delta, \gamma} (T_{\gamma^{-1}\alpha\delta} g_\delta, g'_\gamma),$$

et tous les termes non nuls (en nombre fini) du second membre sont des fonctions continues de α en vertu de notre hypothèse que T_γ est une fonction faiblement continue sur le groupe topologique Γ. La continuité faible de U_α entraîne sa continuité forte, cf. [6]).

Pour $\mathfrak{f} \in H_0$ on a, en vertu de (11),

$$PU_\alpha \mathfrak{f} = (U_\alpha \mathfrak{f})_\varepsilon = (\mathfrak{f})_{\alpha^{-1}}.$$

En particulier, si $\mathfrak{f} = f \in H$, c'est-à-dire que $\mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\}$, on a donc

$$PU_\alpha f = T_\alpha f.$$

Cela achève la démonstration de ce qu'une représentation de type (4) existe. De plus, on a pour $g \in H$

$$U_\alpha g = U_\alpha \{T_{\gamma^{-1}} g\} = \{T_{\gamma^{-1}\alpha} g\},$$

d'où il s'ensuit que, pour $\mathfrak{f}=\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}=\{g_\gamma\}$, on a

$$(\mathfrak{f})_\gamma=\sum_\delta T_{\gamma^{-1}\delta}g_\delta=\sum_\delta (U_\delta g_\delta)_\gamma=\Big(\sum_\delta U_\delta g_\delta\Big)_\gamma,$$

donc $\mathfrak{f}=\sum_\delta U_\delta g_\delta$. Par conséquent, $\boldsymbol{H}_0$ et alors $\boldsymbol{H}$ sont sous-tendus par les éléments de la forme $U_\delta g$ $(g\in H,\ \delta\in\Gamma)$, c'est-à-dire que l'espace $\boldsymbol{H}$ que nous avons construit est *minimal.*

Envisageons maintenant deux représentations unitaires de Γ, U'_γ dans $\boldsymbol{H}'$ et U''_γ dans $\boldsymbol{H}''$, telles que $\boldsymbol{H}'\supset H$, $\boldsymbol{H}''\supset H$ et que, dans H,

$$T_\gamma=P'U'_\gamma,\quad T_\gamma=P''U''_\gamma;$$

supposons de plus que chacun des espaces $\boldsymbol{H}', \boldsymbol{H}''$ est minimal, c'est-à-dire que $\boldsymbol{H}'$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U'_\gamma f$, et $\boldsymbol{H}''$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U''_\gamma f$ $(f\in H)$. On a, pour $\Phi'=\sum_\gamma U'_\gamma f_\gamma$ et $\Psi'=\sum_\gamma U'_\gamma g_\gamma$ $(f_\gamma, g_\gamma\in H)$,

$$(\Phi',\Psi')=\sum_{\gamma,\delta}(U'_\gamma f_\gamma, U'_\delta g_\delta)=\sum_{\gamma,\delta}(U'_{\delta^{-1}}U'_\gamma f_\gamma, P'g_\delta)=\sum_{\gamma,\delta}(P'U'_{\delta^{-1}\gamma}f_\gamma, g_\delta)=$$
$$=\sum_{\gamma,\delta}(T_{\delta^{-1}\gamma}f_\gamma, g_\delta),$$

donc (Φ',Ψ') ne dépend que de f_γ, g_δ et T_α. Il s'ensuit que la correspondance

$$\Phi'=\sum_\gamma U'_\gamma f_\gamma \longleftrightarrow \sum_\gamma U''_\gamma f_\gamma=\Phi''$$

est linéaire et isométrique, et alors elle peut être prolongée par continuité à une correspondance linéaire et isométrique entre les espaces $\boldsymbol{H}'$ et $\boldsymbol{H}''$ tout entiers. Puisque

$$U'_\alpha\Phi'=\sum_\gamma U'_{\alpha\gamma}f_\gamma=\sum_\eta U'_\eta f_{\alpha^{-1}\eta}\longleftrightarrow\sum_\eta U''_\eta f_{\alpha^{-1}\eta}=\sum_\gamma U''_{\alpha\gamma}f_\gamma=U''_\alpha\Phi''$$

cette correspondance établit une *isomorphie* entre les "structures" $\{\boldsymbol{H}', U'_\gamma\}$ et $\{\boldsymbol{H}'', U''_\gamma\}$.

Cela achève la démonstration du théorème.

4. Théorème de Neumark.

Remarquons que le théorème de NEUMARK, mentionné déjà dans l'introduction[11]), est une conséquence du théorème III, du moins pour un espace de Hilbert complexe H. Ce théorème affirme que *toute famille* $\{F_\lambda\}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$

[11]) М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 227—309 (résumé en anglais: 309—318); Об одном представлении аддитивных операторных функции множеств, Доклады Акад. Наук СССР, 41 (1943), 373—375.

de transformations autoadjointes bornées de H, telle que $F_\lambda \leqq F_\mu$ pour $\lambda < \mu$, $F_{\lambda+0} = F_\lambda$, $F_\lambda \to O$ pour $\lambda \to -\infty$, $F_\lambda \to I$ pour $\lambda \to \infty$, peut être représentée sous la forme

$$F_\lambda = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda$$

où $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ est une famille spectrale (de projections) dans un espace $\boldsymbol{H}$ contenant H comme un sous-espace, et où $\boldsymbol{P}$ est la projection sur H.

Envisageons à cet effet la transformation

$$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_\lambda,$$

elle est une fonction faiblement continue du paramètre réel t $(-\infty < t < \infty)$. et de type positif. En effet, $T_{-t} = T_t^*$, et

$$\sum_{m,n=1}^{N} (T_{t_n-t_m} g_n, g_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{N} \exp[i(t_n - t_m)\lambda]\, d(F_\lambda g_n, g_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) g(\lambda), g(\lambda)) \geqq 0$$

où

$$g(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} \exp(it_n\lambda)\, g_n.$$

En vertu du théorème III on a donc

$$T_t = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t,$$

$\{\boldsymbol{U}_t\}$ étant une représentation unitaire continue, dans un espace $\boldsymbol{H} \supseteq H$, du groupe additif des nombres réels. D'après le théorème de STONE on a une famille spectrale $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ dans $\boldsymbol{H}$ telle que

$$\boldsymbol{U}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda.$$

Pour $f \in H$ on a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_\lambda f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f,$$

d'où il s'ensuit que $F_\lambda f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f$, c. q. f. d.

Si $\{F_\lambda\}$ est "étalé" sur le segment $(0, 2\pi)$, c'est-à-dire si $F_0 = O$, $F_{2\pi} = I$, on peut raisonner, au lieu de la "fonction de type positif" T_t, avec la "suite de type positif"

$$T_n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda}\, dF_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et alors on applique, au lieu du théorème de Stone, son analogue "discret"

$$\boldsymbol{U}^n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

D'ailleurs, le cas général peut être réduit à ce cas particulier en remplaçant le paramètre λ par un autre, $\mu = \varphi(\lambda)$, où φ est une fonction strictement croissante et continue, prenant ses valeurs dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

5. Contractions d'un espace de Banach quelconque.

Le théorème I peut être étendu, du moins partiellement, au cas d'un espace de Banach (réel ou complexe) quelconque:

Théorème IV. *Si T est une contraction de l'espace de Banach B, il existe un espace de Banach $\boldsymbol{B}$ contenant B comme un sous-espace, et une transformation isométrique $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{B}$ tout entier, de sorte qu'on ait*

$$T^n f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^n f \qquad (\textit{pour } f \in B,\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\boldsymbol{P}$ étant une projection parallèle de $\boldsymbol{B}$ sur B, de norme égale à 1.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{B}$ l'ensemble des suites $\mathfrak{f} = \{f_n\}_{-\infty}^{\infty}$ d'éléments de B telles que

$$\|\mathfrak{f}\| = \sum_{-\infty}^{\infty} \|f_n\| < \infty.$$

Avec cette définition de la norme $\|\mathfrak{f}\|$, et avec la définition évidente de l'addition et de la multiplication par des scalaires, $\boldsymbol{B}$ devient un espace de Banach. L'élément $f \in B$ peut être identifié avec l'élément $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in \boldsymbol{B}$ pour lequel $f_0 = f$ et $f_n = 0$ $(n \neq 0)$; B devient ainsi un sous-espace de $\boldsymbol{B}$.

Posons, pour $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{P}\mathfrak{f} = \sum_{0}^{\infty} T^n f_n;$$

vu que $\|T^n f_n\| \leqq \|f_n\|$, la série au second membre converge. On a défini ainsi une transformation linéaire, de norme 1, de $\boldsymbol{B}$ en B, qui laisse invariant les éléments du sous-espace B de $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{P}$ est donc une projection parallèle de $\boldsymbol{B}$ sur B, de norme 1.

En posant

$$\boldsymbol{U}\{f_n\} = \{f_{n-1}\}$$

on a défini une transformation isométrique de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{B}$ tout entier, et l'on a, pour $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m\{f_n\} = \boldsymbol{P}\{f_{n-m}\} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n f_{n-m}.$$

En particulier, si $\{f_n\} = f \in B$, c'est-à-dire si $f_0 = f$, $f_n = 0$ $(n \neq 0)$, on aura

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m f = T^m f \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

ce qui achève la démonstration du théorème. Remarquons que, pour $m = -1, -2, \ldots$, on a $\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m f = 0$.

(Reçu le 1 septembre 1953)