Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen.

Von G. Szász in Szeged.

§ 1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich bezüglich der allgemeinen multiplikativen Strukturen alle unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen gegeben. In der vorliegenden Arbeit werde ich das analoge Problem für den kommutativen Fall untersuchen. Um unser Problem genau formulieren zu können, schicke ich zuerst einige Definitionen und Bezeichnungen voraus.

Es sei S_ν eine gegebene Menge mit ν Elementen; ν mag endlich oder unendlich sein. Ist in S_ν eine (eindeutige) Multiplikation definiert, so sagen wir, daß die Menge S_ν hinsichtlich der gegebenen Multiplikation eine *multiplikative Struktur* $S_\nu^\times$ bildet. Natürlich lassen sich aus S_ν mehrere $S_\nu^\times$ bilden; ist die Multiplikation in $S_\nu^\times$ kommutativ, so nennen wir $S_\nu^\times$ eine *kommutative multiplikative Struktur.*

Betrachten wir jetzt die aus den Elementen eines S_ν gebildeten Tripel. Wenn das Tripel (x, y, z) $(x, y, z \in S_\nu)$ in einem $S_\nu^\times$ die Gleichung $(xy)z = x(yz)$ erfüllt, so nennen wir es *assoziativ in* $S_\nu^\times$; ist dagegen $(xy)z \neq x(yz)$ in $S_\nu^\times$, so sagen wir, daß (x, y, z) *nichtassoziativ in* $S_\nu^\times$ ist.

Die sämtlichen Gleichungen

$$(1) \qquad (xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S_\nu)$$

werden die *Assoziativitätsbedingungen der Menge* S_ν, insbesondere die Gleichung $(xy)z = x(yz)$ die *zum Tripel* (x, y, z) *gehörende Assoziativitätsbedingung* genannt, die wir etwas ungenau manchmal auch „die Assoziativitätsbedingung (x, y, z)" nennen. Eine multiplikative Struktur, in der alle Gleichungen (1) erfüllt sind, nennen wir eine *assoziative multiplikative Struktur* oder eine *Halbgruppe.* Anders gesagt, eine Halbgruppe ist eine multiplikative Struktur mit lauter assoziativen Tripeln.

Die Gesamtheit der Gleichungen (1) ist ein Axiomensystem der Assoziativität für allgemeine multiplikative Strukturen. In der zitierten Arbeit habe

[1]) G. Szász, Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen, *diese Acta,* **15** (1953), 20—28.

ich das Problem der Unabhängigkeit dieses Axiomensystems vollständig gelöst. Als Hauptresultat habe ich bewiesen, daß die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen von S_ν für $\nu \geqq 4$ ein unabhängiges System bildet. Das heißt, es gibt im Fall $\nu \geqq 4$ keine Teilmenge der Assoziativitätsbedingungen von der Eigenschaft, daß aus dem Erfülltsein der Assoziativitätsbedingungen dieser Teilmenge auch schon das von allen Assoziativitätsbedingungen folgt. Dies bedeutet, daß im allgemeinen zum Ausweis der Assoziativität einer multiplikativen Struktur mit mindestens vier Elementen alle Tripel nach der Assoziativität hin untersucht werden müssen. Für $\nu \leqq 3$ sind die Assoziativitätsbedingungen von S_ν nicht alle voneinander unabhängig; für diese Fälle habe ich die sämtlichen unabhängigen vollständigen[2]) Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen gegeben.

Es liegt die Lage ganz anders, wenn man nicht die sämtlichen aus S_ν gebildeten multiplikativen Strukturen, sondern nur die kommutativen betrachtet. Dann bildet die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen selbstverständlich für kein ν ein unabhängiges Axiomensystem. Wegen der Kommutativität ist nämlich eine Gleichung

$$(xy)z = x(yz) \tag{2.1}$$

mit der anderen

$$(zy)x = z(yx) \tag{2.2}$$

gleichzeitig erfüllt oder gleichzeitig nichterfüllt. In dieser Arbeit wollen wir deshalb für jedes ν alle unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen bezüglich der kommutativen multiplikativen Strukturen mit ν Elementen bestimmen. Ausführlich gesagt, wir werden alle Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen bestimmen, die die folgenden zwei Eigenschaften besitzen:

1. Sind in einer kommutativen $S_\nu^\times$ die Assoziativitätsbedingungen des genannten Teilsystems alle erfüllt, so sind es auch die übrigen Assoziativitätsbedingungen in $S_\nu^\times$ („Vollständigkeit des Teilsystems");

2. Zu jeder Assoziativitätsbedingung dieses Teilsystems kann man ein kommutatives $S_\nu^\times$ finden, so daß in diesem die betrachtete Assoziativitätsbedingung nichterfüllt, alle anderen Assoziativitätsbedingungen des Teilsystems erfüllt sind („Unabhängigkeit des Teilsystems").

Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir die folgenden Resultate bekommen:

Satz 1. *Bezüglich der aus der Menge S_ν ($\nu \geqq 3$) gebildeten kommutativen multiplikativen Strukturen lassen sich die sämtlichen unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen folgenderweise gewinnen:*

---

[2]) Wie üblich nennen wir ein Teilsystem eines Axiomensystems *vollständig*, wenn es mit dem ursprünglichen äquivalent ist.

1°. *Im Fall* $\nu = 3$ *wähle man von den aus* S_3 *gebildeten Tripeln eins mit verschiedenen Elementen beliebig aus.*

2°. *Im Fall* $\nu \geqq 4$ *betrachte man zunächst alle Tripel*

$$(a, b, c) \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \in S_\nu; \\ a \neq b, \; b \neq c, \; c \neq a \end{pmatrix}.$$

Aus je sechs dieser Tripel, die voneinander nur in der Reihenfolge der Elemente unterscheiden, wähle man je zwei Tripel, die auseinander nicht durch die Umkehrung der Reihenfolge der Elemente entstehen, beliebig aus.

3°. *In beiden Fällen* 1°, 2° *wähle man noch aus je zwei Tripeln*

$$(a, a, b), \quad (b, a, a) \qquad (a, b \in S;\ a \neq b)$$

das eine beliebig aus.

Die zu den ausgewählten Tripeln gehörenden Assoziativitätsbedingungen bilden in jedem Falle $\nu \geqq 3$ *ein gewünschtes Teilsystem aller Assoziativitätsbedingungen, und jedes solche Teilsystem entsteht auf diese Weise*[3]).

Für den Fall $\nu = 2$ gilt der folgende

Satz 2. *Bezüglich der aus der Menge*[4]) $S_2 = \{a, b\}$ *gebildeten kommutativen multiplikativen Strukturen besteht jedes unabhängige vollständige Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen aus einer einzigen, und zwar aus einer beliebigen der zu*

$$(a, a, b), \quad (a, b, b), \quad (b, a, a), \quad (b, b, a)$$

gehörenden Assoziativitätsbedingungen.

Wir werden den Beweis dieser Sätze im § 2 mit einer Reduktion beginnen.

§ 2. Reduktion des Problems.

Von hier an verstehen wir unter „Multiplikation" immer „kommutative Multiplikation", unter „Struktur" immer „kommutative (multiplikative) Struktur". Dementsprechend werden wir dem Ausdruck „unabhängiges vollständiges Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen" immer auch die Ergänzung „bezüglich der kommutativen multiplikativen Strukturen" beigefügt denken.

---

3) Man sieht leicht, daß die Anzahl derjenigen Tripel, die nach 3° bzw. nach 2° ausgewählt werden müssen, für ein endliches $\nu \geqq 4$ gleich $\nu(\nu-1)$, bzw. $2\binom{\nu}{3}$ ist. Jedes unabhängige vollständige Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen einer endlichen Menge S_ν ($\nu \geqq 4$) besteht also nach diesem Satz aus

$$\nu(\nu-1) + 2\binom{\nu}{3} = \frac{\nu^3 - \nu}{3}$$

Gleichungen.

Ähnlich ergibt sich leicht nach 1° und 2°, daß im Fall $\nu = 3$ jedes unabhängige vollständige Teilsystem der Assoziativitätsbedingungen aus 7 Gleichungen besteht.

4) Mit $\{\ \}$ bezeichnen wir die Menge der eingeklammerten Elemente.

Ferner verabreden wir uns, daß wir beliebige, nicht notwendig verschiedene Elemente von S_ν mit x, y, z, und beliebige, aber verschiedene Elemente von S_ν mit a, b, c, d bezeichnen (wie auch schon in den vorangehenden).

Es wurde schon in der Einleitung erwähnt, daß sich die Gleichungen

$$(xy)z = x(yz), \quad z(yx) = (zy)x \tag{2}$$

wegen der Kommutativität für alle Tripel (x, y, z) gleichzeitig erfüllt oder gleichzeitig nichterfüllt sind. Auf Grund dieser Tatsache definieren wir einen Äquivalenzbegriff für die Assoziativitätsbedingungen der Menge S_ν:

D e f i n i t i o n 1. *Zwei verschiedene Assoziativitätsbedingungen von S_ν nennen wir (bezüglich der kommutativen multiplikativen Strukturen) äquivalent, wenn in ihnen die Reihenfolge der auftretenden Elemente entgegengesetzt ist. Es wird jede Assoziativitätsbedingung auch mit sich selbst äquivalent genannt.*

Es ist klar, daß äquivalente Assoziativitätsbedingungen nur gleichzeitig erfüllt sein können.

Ferner definieren wir die Äquivalenz zweier Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen:

D e f i n i t i o n 2. *Zwei Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen nennen wir äquivalent, wenn die in ihnen vorkommenden Assoziativitätsbedingungen paarweise äquivalent sind.*

Ist von zwei äquivalenten Teilsystemen der Assoziativitätsbedingungen das eine unabhängig und vollständig, so ist es auch das andere. Deshalb *genügt es alle nichtäquivalenten unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen zu bestimmen.* Wir werden deshalb unsere Untersuchungen in dieser Richtung führen.

Kurz bezeichnen wir mit $S_\nu^{(3)}$ die Menge aller Tripel, die sich aus den Elementen von S_ν bilden lassen. Wir sagen, daß die Elemente (x, y, z), (x', y', z') von $S_\nu^{(3)}$ *vom gleichen Typ* sind, wenn sie auseinander durch eine Permutation der Elemente von S_ν entstehen. Faßt man die Tripel von gleichem Typ in einer Klasse zusammen, so entsteht eine Einteilung der Menge $S_\nu^{(3)}$ in paarweise elementfremde Klassen. Im Fall $\nu \geqq 3$ gibt es insgesamt fünf solche Klassen. Diese bestehen der Reihe nach aus den Tripeln vom Typ

$$(a, a, a), \quad (a, b, a), \quad (a, a, b), \quad (b, a, a), \quad (a, b, c).$$

Der Fall $\nu = 2$ ist ähnlich mit dem Unterschied, daß die fünfte Klasse ausbleibt.

Selbstverständlich sagen wir, daß zwei Assoziativitätsbedingungen vom gleichen Typ sind, wenn sie Tripeln vom gleichen Typ zugehören. Wird dann in der obigen Klasseneinteilung jedes Tripel durch die entsprechende Assoziativitätsbedingung ersetzt, so entsteht eine Einteilung aller Assoziativitätsbedingungen in (fünf, bzw. vier) Klassen, in denen stets die Assoziativitätsbedingungen vom gleichen Typ vereinigt sind.

Nun lassen sich in unserem Problem einige leichte Reduktionen ausführen, mit denen wir uns hier beschäftigen wollen. Vor allem erkennen wir, daß alle Tripel vom Typ (a, a, a) und (a, b, a) in jeder Struktur $S_\nu^\times$ assoziativ sind. Wegen der Kommutativität gelten nämlich

$$(aa)a = a(aa) \quad \text{und} \quad (ab)a = a(ba)$$

für alle a, b in S_ν. Wir dürfen also die Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, a) und (a, b, a) durchaus außer Acht lassen.

Ferner sehen wir aus Definition 1, daß jede Assoziativitätsbedingung vom Typ (b, a, a) zu einer vom Typ (a, a, b) äquivalent ist. Zufolge dieser Tatsache und der obigen Bemerkung brauchen wir uns also aus diesen zwei Typen nur mit dem einen, zum Beispiel nur mit den Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b) zu beschäftigen.

Endlich sind die Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, b, c) wegen der Äquivalenz zweier Gleichungen von der Form (2) paarweise äquivalent. Dabei brauchen wir aus äquivalenten Paaren der Assoziativitätsbedingungen nur stets je einen Repräsentanten zu beachten. Die zu beachtenden dürfen wir natürlich beliebig auswählen; um aber etwas bestimmtes vor Augen zu haben, entscheiden wir darüber folgenderweise.

Je sechs Tripel von diesem Typ, die nur durch die Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, teilen wir in eine Klasse ein. So wird jedes Tripel vom Typ (a, b, c) eindeutig in eine solche Klasse eingeteilt. Jene von diesen Klassen, deren sechs Tripel aus den Elementen a, b, c gebildet sind, werde mit $C[a, b, c]$ bezeichnet. Die Klasse $C[a, b, c]$ besteht also aus den Tripeln

$$(a, b, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b) \tag{3.1}$$

und

$$(c, b, a), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c). \tag{3.2}$$

Im Fall $\nu = 3$ gibt es natürlich nur eine einzige Klasse $C[a, b, c]$, so daß für $\nu = 3$ „Typ (a, b, c)" und „Klasse $C[a, b, c]$" gleichbedeutend sind.

Zu den Tripeln (3.1) bzw. (3.2) gehören die Assoziativitätsbedingungen

$$(ab)c = a(bc), \quad (bc)a = b(ca), \quad (ca)b = c(ab) \tag{4.1}$$

bzw.

$$(cb)a = c(ba), \quad (ac)b = a(cb), \quad (ba)c = b(ac). \tag{4.2}$$

Die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen (4.1), (4.2) nennen wir, ähnlich wie die Gesamtheit aller Tripel (3.1), (3.2), „die $C[a, b, c]$-Klasse der Assoziativitätsbedingungen (vom Typ (a, b, c))". Man sieht sofort, daß jede Assoziativitätsbedingung von der Form (4.2) mit einer von der Form (4.1) äquivalent ist. Es ist also für uns hinreichend aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ (bei einer beliebig festgestellten Anordnung der Elemente a, b, c) nur die Tripel von der Form (3.1) zu beachten.

Wir fassen unsere vorstehenden Bemerkungen zusammen. Bezeichne $S_{\nu k}^{(3)}$ die Gesamtheit aller Tripel aus $S_\nu^{(3)}$, die nach der obigen Reduktion noch weiter zu untersuchen sind. Also bestehe $S_{\nu k}^{(3)}$ aus allen Tripeln vom Typ (a, a, b) und aus den Tripeln (3. 1) aller Klassen $C[a, b, c]$. Ferner werde die Gesamtheit aller Assoziativitätsbedingungen, von denen jede einzelne zu einem Tripel von $S_{\nu k}^{(3)}$ gehört, kurz „das reduzierte System (der Assoziativitätsbedingungen)" genannt. Dann lassen sich die obigen Überlegungen folgendermaßen zusammenfassen: *Abgesehen von Äquivalenz entstehen alle unabhängigen vollständigen Teilsysteme der Assoziativitätsbedingungen so, daß man nur die sämtlichen unabhängigen vollständigen Teilsysteme des reduzierten Systems bildet.* Deshalb brauchen wir in den folgenden nach der Assoziativität hin nur die Tripel von $S_{\nu k}^{(3)}$ zu untersuchen und statt unserer obigen Sätze die folgenden, mit ihnen gleichwertigen Behauptungen nachzuweisen:

Behauptung 1. *Im Fall $\nu \geqq 4$ enthält ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ genau zwei beliebig ausgewählte Assoziativitätsbedingungen von der Form* (4. 1).

Behauptung 2. *Im Fall $\nu = 3$ enthält ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems aus der einzigen Klasse $C[a, b, c]$ genau eine beliebig ausgewählte Assoziativitätsbedingung von der Form* (4. 1).

Behauptung 3. *Im Fall $\nu \geqq 3$ enthält ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems alle Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b).*

Behauptung 4. *Im Fall $\nu = 2$ besteht ein unabhängiges vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems aus einer einzigen Assoziativitätsbedingung; für sie kann man beliebig entweder die zum Tripel (a, a, b) oder die zum Tripel (b, a, a) gehörende nehmen.*

§ 3. Beweis der Behauptung 1.

Zuerst zeigen wir, daß im Fall $\nu \geqq 4$ ein vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems, wenn es ein unabhängiges ist, aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ *höchstens* zwei Assoziativitätsbedingungen (von der Form (4. 1)) enthalten darf. Mit anderen Worten: *Sind in einer Klasse $C[a, b, c]$ der Assoziativitätsbedingungen von $S_\nu (\nu \geqq 4)$ zwei beliebige, zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörende Assoziativitätsbedingungen erfüllt, so ist schon die dritte zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörende Assoziativitätsbedingung dieser Klasse auch erfüllt.*

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß in der Klasse $C[a, b, c]$ die Assoziativitätsbedingungen (a, b, c) und (b, c, a) erfüllt sind; d. h. daß die Gleichungen

(5) $$(ab)c = a(bc)$$

und

(6) $$(bc)a = b(ca)$$

gelten. Wegen der Kommutativität ergibt sich sofort

$$c(ab) = (ab)c = a(bc) = (bc)a = b(ca) = (ca)b,$$

also

(7) $$(ca)b = c(ab).$$

Gleichung (7) bedeutet aber, daß auch die dritte Assoziativitätsbedingung von der Form (4. 1) der betrachteten Klasse $C[a, b, c]$ erfüllt ist. Man sieht ähnlich ein, daß aus den Gleichungen (6) und (7) auch schon (5), aus (7) und (5) auch schon (6) folgt.

Wir haben noch zu zeigen, daß ein unabhängiges Teilsystem des reduzierten Systems nur dann vollständig sein kann, wenn es aus jeder Klasse $C[a, b, c]$ *mindestens* zwei Assoziativitätsbedingungen (von der Form (4. 1)) enthält. Ausführlicher gesagt: *Es sei $C[a, b, c]$ eine beliebige Klasse der Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, b, c), und nehme man das Erfülltsein aller nicht in $C[a, b, c]$ liegenden Assoziativitätsbedingungen des reduzierten Systems an. Man kann doch eine Struktur $S_\nu^\times$ $(\nu \geqq 4)$ angeben, in der auch noch aus $C[a, b, c]$ eine Assoziativitätsbedingung von der Form* (4. 1) *erfüllt, die beiden anderen aber nichterfüllt sind.*

Dazu betrachten wir die Struktur $S_\nu^\times$, in der die Multiplikation durch die Gleichungen

(8) $$\begin{cases} ac(=ca) = bb = b \\ xy = d \qquad \text{übrigens} \end{cases}$$

definiert ist, wo d ein von a, b, c verschiedenes, übrigens aber beliebig festgestelltes Element von S_ν bedeutet.

Nach (8) sind keine Produkte von zwei Elementen gleich a oder c; folglich ist $(xy)z$ gleich b oder d. Ferner ist aber auch $(xy)z = b$ dann und nur dann, wenn $xy = b$, $z = b$ ist, also in den folgenden drei Fällen:

(9. 1) $$x = a, \quad y = c, \quad z = b,$$

(9. 2) $$x = c, \quad y = a, \quad z = b,$$

(9. 3) $$x = b, \quad y = b, \quad z = b.$$

(In allen übrigen Fällen gilt $(xy)z = d$.) Man sieht sofort, daß die Tripel in (9. 1) und (9. 3) nicht zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehören. Das Tripel in (9. 2) ist aber eines von $S_{\nu k}^{(3)}$, so daß wir für die Elemente von $S_{\nu k}^{(3)}$ das folgende Ergebnis bekommen haben:

(10) $$\begin{cases} (ca)b = b, & \text{aber} \\ (xy)z = d & \text{für alle übrigen } (x, y, z) \in S_{\nu k}^{(3)}. \end{cases}$$

Andererseits folgt, wieder aus $xy \neq a, c$ für alle Paare x, y, daß $x(yz) = b$ dann und nur dann gilt, wenn $x = b$, $yz = b$ ist, also in der folgenden drei Fällen:

(11. 1) $x=b,\quad y=a,\quad z=c,$

(11. 2) $x=b,\quad y=c,\quad z=a,$

(11. 3) $x=b,\quad y=b,\quad z=b;$

sonst gilt $x(yz)=d$. Die Tripel in (11. 1) und (11. 3) gehören auch jetzt nicht zu $S_{\nu k}^{(3)}$. Das Tripel in (11. 2) ist aber eines von $S_{\nu k}^{(3)}$, so daß für die Elemente von $S_{\nu k}^{(3)}$

(12) $$\begin{cases} b(ca)=b, & \text{aber} \\ x(yz)=d & \text{für alle übrigen } (x, yz)\in S_{\nu k}^{(3)} \end{cases}$$

gelten.

Vergleicht man die Resultate (10) und (12), so sieht man sofort, daß in dieser Struktur die zu den Tripeln (b, c, a), (c, a, b) gehörenden Assoziativitätsbedingungen nichterfüllt, die zu den übrigen Tripeln von $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörenden aber erfüllt sind.

Durch die Gleichungen (8) haben wir also in der Tat ein $S_\nu^\times$ von gewünschter Art konstruiert, womit unsere Behauptung 1 völlig bewiesen ist.

§ 4. Beweis der Behauptung 2.

Wir bemerken im voraus, daß uns der nächstfolgende Beweis im Vergleich mit den übrigen unverhältnismäßig große Schwierigkeiten machen wird.

Ähnlich wie vorher, brauchen wir im Fall $\nu=3$ folgendes nachzuweisen:

4. 1. Ein unabhängiges Teilsystem des reduzierten Systems kann nur dann ein vollständiges sein, wenn es *mindestens* eine Assoziativitätsbedingung vom Typ (a, b, c) (natürlich von der Form (4. 1)) enthält;

4. 2. Ein vollständiges Teilsystem des reduzierten Systems, wenn es ein unabhängiges ist, enthält *höchstens* nur eine solche Assoziativitätsbedingung.

Um 4. 1 nachzuweisen, geben wir ein $S_3^\times$ an, in dem aus den zu $S_{3k}^{(3)}$ gehörenden Assoziativitätsbedingungen alle vom Typ (a, a, b) erfüllt, dagegen alle vom Typ (a, b, c) nichterfüllt sind. Und zwar zeigen wir, daß die Struktur $S_\nu^\times$ mit der Cayleyschen Tafel

(13)

	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	b
c	c	b	c

eine solche ist.

Man sieht sofort, daß in der durch (13) gegebenen Struktur je zwei aus den Elementen a, b, c eine Unterstruktur bilden; es ist auch leicht zu sehen, daß diese Unterstrukturen assoziativ sind. Dies bedeutet, daß allerdings alle solchen Assoziativitätsbedingungen erfüllt sind, die höchstens zwei verschiedene Elemente von S_3 enthalten. Insbesondere sind also alle Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b) erfüllt.

Für die drei Tripel vom Typ (a, b, c) von $S_{3k}^{(3)}$ gewinnen wir aber aus (13)

$$\begin{aligned} (ab)c = ac = c, \quad & a(bc) = ab = a; \\ (bc)a = ba = a, \quad & b(ca) = bc = b; \\ (ca)b = cb = b, \quad & c(ab) = ca = c; \end{aligned}$$

also

$$(ab)c \neq a(bc), \quad (bc)a \neq b(ca), \quad (ca)b \neq c(ab),$$

womit wir die Richtigkeit von 4. 1 gezeigt haben.

Der Nachweis von 4. 2 wird auf indirektem Wege stattfinden. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall, daß aus den zu $S_{3k}^{(3)}$ gehörenden Assoziativitätsbedingungen alle vom Typ (a, a, b) und sogar die zu (c, a, b) gehörende erfüllt sind, und nehmen an, daß trotzdem die zu (a, b, c) und (b, c, a) gehörenden nichterfüllt sind. Es gelten also für die Tripel von $S_{3k}^{(3)}$

(14) $\qquad (xx)y = x(xy)$ für alle $x, y \in S_3$,

(15) $\qquad (ca)b = c(ab)$,

(16) $\qquad (ab)c \neq a(bc)$,

(17) $\qquad (bc)a \neq b(ca)$.

Wir werden nach den möglichen Werten der Produkte $(ab)c$, $a(bc)$, $(bc)a$, $b(ca)$ eine Fallunterscheidung machen. Es gilt wegen der Kommutativität

(18) $\qquad a(bc) = (bc)a$;

ferner folgt aus (15), wieder wegen der Kommutativität,

(19) $\qquad b(ca) = (ca)b = c(ab) = (ab)c$.

Nach (16)—(19) brauchen wir also nur die folgenden sechs Fälle zu unterscheiden:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(ab)c =$	a	b	b	c	c	a
$a(bc) = (bc)a =$	b	a	c	b	a	c
$b(ca) =$	a	b	b	c	c	a

Vertauscht man überall die Rolle von b und c, so gehen die Bedingungsgleichungen der Fälle 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 bzw. ineinander über. Es genügt also die Unmöglichkeit der Fälle 1 bis 3 zu zeigen. Dies wird meistens dadurch geschehen, daß wir aus den Bedingungsgleichungen in den Fällen 1 bis 3, im Widerspruch gegen unsere Annahme (14), auf die Nichtassoziativität je eines Tripels vom Typ (a, a, b) schließen werden.

Fall 1. Die Bedingungsgleichungen sind jetzt

(20. 1) $\qquad (ab)c = a$,

(20. 2) $\qquad a(bc) = b$,

(20. 3) $\qquad b(ca) = a$.

Entsprechend den drei möglichen Werten des Produktes ab unterscheiden wir die drei Unterfälle $ab=a$, $ab=b$ und $ab=c$.

1. 1. Im Fall $ab=a$ folgt aus (20. 1) $ac=a$, so daß der Wert des Produktes bc, mit Rücksicht auch auf (20. 2), weder b noch c sein mag. Es gilt also $bc=a$. Hieraus ergibt sich, wieder nach (20. 2), $aa=b$. Wir gewinnen also

$$(aa)c=bc=a, \quad a(ac)=aa=b,$$

d. h. die Nichtassoziativität von (a, a, c).

1. 2. Im Fall $ab=b$ folgt aus (20. 1)

(21) $$bc=a,$$

und hieraus folgt weiter, nach (20. 2), $aa=b$. Letzteres ergibt, wegen der Assoziativität des Typs (a, a, b),

(22) $$bb=(aa)b=a(ab)=ab=b.$$

Nach (22) und (21) ist

$$(bb)c=bc=a, \quad b(bc)=ba=ab=b.$$

Wir haben so auf die Nichtassoziativität des Tripels (b, b, c) geschloßen.

1. 3. Im Fall $ab=c$ werden wir auf die Nichtassoziativität von (c, c, a) schließen.

Aus $ab=c$ folgt, erstens nach (20. 2),

(23) $$(cb=)bc\neq b,$$

zweitens nach (20. 1),

(24) $$cc=a.$$

Letzteres ergibt, wegen der Assoziativität von (c, c, b),

(25) $$c(cb)=(cc)b=ab=c.$$

Dies bedeutet, mit Rücksicht auf (24), daß cb nicht gleich c ist. Wegen (23) bleibt also für cb nur die Möglichkeit $cb=a$. Setzen wir es in (25) bzw. in (20. 2) ein, so bekommen wir die Relationen

(26) $$ca=c,$$

(27) $$aa=b.$$

Nun folgt aus (24), (27) bzw. aus (26), (24)

$$(cc)a=aa=b, \quad c(ca)=cc=a,$$

womit wir in der Tat die Nichtassoziativität von (c, c, a) gewonnen haben.

Fall 2. Die Bedingungsgleichungen lauten jetzt folgenderweise:

(28. 1) $$(ab)c=b,$$

(28. 2) $$a(bc)=a,$$

(28. 3) $$b(ca)=b.$$

Wir sehen sofort, daß in diesem Fall $ab=b$ nicht möglich ist. Aus $ab=b$ würde nämlich nach (28. 1) $bc=b$, und hieraus weiter nach (28. 2) $ab=a$

folgen. Wir haben aber $a \neq b$ vorausgesetzt, weshalb $ab = b$ und $ab = a$ nicht gleichzeitig bestehen mögen.

Wir brauchen also nur noch die Unterfälle $ab = a$ und $ab = c$ zu unterscheiden.

2. 1. Wenn $ab = a$ ist, dann gilt nach (28. 1)

(29) $$ac = b.$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (28. 2),

(30) $$bc \neq c.$$

Wir untersuchen jetzt den Wert des Produktes aa. Vermöge der Assoziativität von (a, a, b) gilt

$$(aa)b = a(ab) = aa,$$

so daß, mit Rücksicht auch auf (30), $aa = c$ unmöglich ist. Nun gilt aber, vermöge der Assoziativität von (a, a, c) und nach (29),

(31) $$(aa)c = a(ac) = ab = a,$$

so daß wieder nach (29) auch $aa = a$ unmöglich ist. Es bleibt also nur die Möglichkeit $aa = b$ übrig.

Aus $aa = b$ würde aber nach (31) $bc = a$, und hieraus nach (28. 2) $aa = a$, also ein trivialer Widerspruch folgen.

Damit ist die Unmöglichkeit dieses Unterfalles gezeigt.

2. 2. In dem Unterfall $ab = c$ ist leicht zu sehen, daß das Produkt ac nicht gleich a oder c sein kann. Es würde nämlich aus $ac = a$ nach (28. 3) $(ab =) ba = b$, und aus $ac = c$ zuerst nach (28. 3) $bc = b$, dann hieraus weiter nach (28. 2) $ab = a$ folgen, was in beiden Fällen einen Widerspruch gegen unsere Ausgangsannahme $ab = c$ bedeutet.

Es soll also

$$ac = b$$

gelten, woraus wir, mit Rücksicht auf (28. 2),

$$bc \neq c$$

bekommen.

Ferner ergibt sich, als eine unmittelbare Folgerung von (28. 1) und der Ausgangsannahme $ab = c$, die Gleichung

$$cc = b.$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt aber

$$(cc)a = ba = c, \quad c(ca) = cb \neq c,$$

d. h. die Nichtassoziativität des Tripels (c, c, a).

Fall 3. Es gelten jetzt als Bedingungsgleichungen

(32. 1) $$(ab)c = b,$$

(32. 2) $$a(bc) = c,$$

(32. 3) $$b(ca) = b.$$

Wir sehen sofort, daß in diesem Fall $ab=b$ unmöglich ist. Denn aus $ab=b$ würde sich nach (32. 1) $bc=b$, und hieraus nach (32. 2) $ab=c$ ergeben. Wir brauchen also nur die Unterfälle $ab=a$ und $ab=c$ zu betrachten.

3. 1. Ist $ab=a$, so folgt aus (32. 1) $ac=b$. Wegen (32. 2) soll also $bc \neq b$ und $bc \neq c$ bestehen; folglich ist $bc=a$. Setzen wir es in (32. 2) ein, so ergibt sich $aa=c$. Aus den beiden letzteren Relationen gewinnen wir

$$(aa)b=cb=a, \quad a(ab)=aa=c,$$

was die Nichtassoziativität von (a, a, b) bedeutet.

3. 2. Ist endlich $ab=c$, so folgt aus (32. 1)

$$cc=b, \tag{33}$$

und aus (32. 3)

$$ca \neq a. \tag{34}$$

Aus der Assoziativität von (c, c, a) folgt weiter, mit Rücksicht auch auf (33),

$$c(ca)=(cc)a=ba=c,$$

weshalb, wieder nach (33),

$$ca \neq c \tag{35}$$

ist. Nach (34) und (35) gilt also

$$(ac=)ca=b. \tag{36}$$

Setzt man dies in (32. 3) ein, so ergibt sich

$$bb=b. \tag{37}$$

Vergleicht man ferner (36) mit (32. 2), so sicht man sofort, daß

$$bc \neq c \tag{38}$$

ist.

Nun gelten aber nach (37) und (38)

$$(bb)a=ba=c, \quad b(ba)=bc \neq c,$$

was die Nichtassoziativität von (b, b, a) bedeutet.

Damit haben wir den Beweis der Behauptung 2 beendigt.

§ 5. Beweis der Behauptung 3.

Um die Behauptung 3 nachzuweisen, betrachten wir ein beliebig ausgewähltes Tripel (a, a, b) aus $S_\nu^{(3)}$ $(\nu \geqq 3)$, und werden dazu ein $S_\nu^\times$ angeben, in der die Assoziativitätsbedingung (a, a, b) nichterfüllt ist, obgleich alle übrigen aus dem reduzierten System erfüllt sind. Damit wird gezeigt, daß das Erfülltsein der (beliebigen) Assoziativitätsbedingung (a, a, b) aus dem aller übrigen zu $S_{\nu k}^{(3)}$ gehörenden überhaupt nicht folgt, was offenbar schon die Richtigkeit der fraglichen Behauptung bedeutet.

Zu diesem Zweck bilden wir ein (kommutatives) $S_\nu^\times$ durch die folgenden Multiplikationsregeln:

$$\left.\begin{array}{l} ab(=ba)=bb=b, \\ xy=c \quad \text{übrigens,} \end{array}\right\} \tag{39}$$

wo c ein beliebig festgewähltes, nur von a und b verschiedenes Element von S_ν ist. Es ist leicht zu sehen, daß für das Tripel (x, y, z), wo keins der Elemente x, y, z den Elementen a, b gleich ist, stets $(xy)z=c$, $x(yz)=c$ gelten; die Assoziativitätsbedingungen sind also für diese Tripel (x, y, z) alle erfüllt. Man braucht deshalb nur solche Tripel (x, y, z) von $S_{\nu k}^{(3)}$ weiter zu untersuchen, in denen die Elemente x, y, z alle gleich a oder b sind. Es gibt zwei Tripel solcher Art, nämlich (a, a, b) und (b, b, a), wofür aber die Gleichungen

$$(aa)b=cb=c, \quad a(ab)=ab=b$$

und

$$(bb)a=ba=b, \quad b(ba)=bb=b$$

gelten.

Damit haben wir gezeigt, daß die Struktur (39) die gewünschten Eigenschaften besitzt.

§ 6. Beweis der Behauptung 4.

In diesem Fall besteht das reduzierte System aus zwei Assoziativitätsbedingungen vom Typ (a, a, b), nämlich aus

$$(aa)b=a(ab) \tag{40. 1}$$

und

$$(bb)a=b(ba). \tag{40. 2}$$

Auf Grund dieser Tatsache kann sich der Leser leicht überzeugen, daß es unter den acht verschiedenen kommutativen $S_2^\times$ nur die mit den Cayleyschen Tafeln

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & a \end{array}$$

angegeben keine Halbgruppen sind; in diesen sind aber (40. 1), (40. 2) nicht erfüllt. Stellt man also in einem $S_2^\times$ das Erfülltsein nur einer von der Assoziativitätsbedingungen (40. 1), (40. 2) fest, so kann man schon auf das Erfülltsein aller übrigen schließen. Das bedeutet aber gerade die Richtigkeit der Behauptung 4.

Zum Schluß bemerken wir, daß im Fall $\nu=1$, da die einzige Struktur $S_1^\times$ trivialerweise assoziativ ist, das „unabhängige vollständige System der Assoziativitätsbedingungen" von S_1 leer ist (sogar auch die Menge $S_{1k}^{(3)}$).

(Eingegangen am 8. Dezember 1953.)