Über als echte Quotientenkörper darstellbare Körper.

Von E. FRIED in Budapest.

Von P. TURÁN stammt das folgende Problem: Welche sind diejenigen Körper K, die als echte Quotientenkörper darstellbar sind, d. h. die einen echten Teilintegritätsbereich I enthalten, dessen Quotientenkörper K ist? Eine Antwort auf diese Frage liefert die Bewertungstheorie: denn jeder Körper, der nichttrivial bewertet werden kann, d. h. einen Bewertungsring B enthält, hat ersichtlich die erwähnte Eigenschaft. Somit bleiben nur die algebraischen Erweiterungen von endlichen Körpern zu untersuchen, und man zeigt mühelos, daß diese die fragliche Eigenschaft nicht besitzen (s. unten). In dieser kurzen Note wollen wir das gestellte Problem unabhängig von der Bewertungstheorie lösen; der Beweis ist völlig elementar, nur an einer Stelle werden wir von dem Zornschen Lemma Gebrauch machen.

Satz. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Körper K sich als echter Quotientenkörper darstellen läßt, ist, daß K von einer algebraischen Erweiterung eines endlichen Körpers verschieden ist.*

Zuerst beweisen wir, daß die im Satze angegebene Bedingung notwendig ist. Es sei K eine algebraische Erweiterung irgendeines endlichen Körpers und I ein Integritätsbereich in K, der von K verschieden ist. Dann sind alle Elemente $\alpha \in I$ algebraisch über dem Primkörper Π von K, d. h. $a_n\alpha^n + \cdots + a_0 = 0$ $(a_i \in \Pi)$. Da Π von Primzahlcharakteristik ist, können wir, im Falle $\alpha \neq 0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 = 1$ annehmen, woraus man unmittelbar folgern kann, daß $\frac{1}{\alpha}$ zu I gehört. Dies beweist, daß der Quotientenkörper von I mit I zusammenfällt, und somit ein echter Teil von K ist.

Um das Hinreichen zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem K eine algebraische oder transzendente Erweiterung seines Primkörpers Π ist.

Es sei K algebraisch über Π. Genügt K der im Satze angegebenen Bedingung, so ist Π dem Körper der rationalen Zahlen isomorph. Nehmen wir den Ring I aller Elemente von K, die in bezug auf I_0 ganz algebraisch sind, wo I_0 den dem Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen isomorphen Unterring von Π bezeichnet, so ist I ein echter Unterring von K und es gilt offenbar, daß der Quotientenkörper von I gleich K ist.

Ist K transzendent über Π, so sei τ ein transzendentes Element in K. Da sich die Menge derjenigen Unterkörper von K, über denen τ transzendent ist, ersichtlich als induktiv erweist, erhält man nach dem Zornschen Lemma, daß es einen maximalen Unterkörper K' von K gibt, über welchem τ transzendent ist. Jedes Element $\alpha \in K$ ist notwendigerweise algebraisch über $K'(\tau)$ — dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß im Falle $\alpha \notin K'$, τ algebraisch über $K'(\alpha)$ sein muß, d. h. α und τ voneinander algebraisch abhängig sind. Nun ist $I_0 = K'[\tau]$ ein echter Unterring von K, der selbst kein Körper ist. Für dieses I_0 sei I wie oben definiert. Dann ist I in K echt enthalten und hat K zum Quotientenkörper, q. e. d.

Es ist leicht, auch eine Anwendung unseres Ergebnisses anzugeben. Wenn man nach dem Vorbild des GAUSSschen Lemmas untersucht, zu welchen Körpern K es einen echten Unterring I gibt, so daß die Irreduzibilität eines Polynoms über I die über K nach sich zieht, so sieht man sofort ein, daß eben die im Satz angegebenen Körper diese Eigenschaft besitzen; man kann dann für I jeden Bewertungsring B wählen.

(Eingegangen am 22. Dezember 1953.)