# Über zwei Extremaleigenschaften des Kreisbogens und der Kugelfläche.

Von A. MOÓR und A. TÖRÖK in Debrecen.

Wir werden zeigen, daß die Kreisbögen und die Kugelflächen die Lösung von zwei Maximum-Minimum-Problemen liefern. In § 1 werden wir einen Hilfssatz von H. BRUNN[1]) in verschärfter Form, sowie sein Analogon im Raum beweisen. In § 2 behandeln wir die beiden Extremaleigenschaften der Kreisbögen und der Kugelflächen.

## § 1. Der Hilfssatz von H. Brunn.

Ein *Mond M* bedeutet im folgenden eine geschlossene Kurve, die aus zwei Konvexbögen besteht, deren Tangenten stetig sind und die auf dieselbe Seite der Verbindungsgeraden ihrer gemeinsamen Endpunkte $A_1, A_2$ fallen und außer ihren Endpunkten keine gemeinsame Punkte besitzen. Die Krümmung $\varkappa(s)$ der Konvexbögen soll stückweise stetig sein (der Parameter $s$ bedeutet die Bogenlänge); in einem Punkt $P$, wo $\varkappa(s)$ nicht stetig ist, sollen $\varkappa(s-0)$ und $\varkappa(s+0)$ existieren.

Einer der Konvexbögen des Mondes liegt im konvexen Bereich, der vom anderen Bogen und von der Strecke $\overline{A_1A_2}$ begrenzt wird: dieser heißt der *innere* Bogen, der andere der *äußere* Bogen des Mondes. Der Mond $M$ ist *einfach*, wenn die Totalkrümmung seines äußeren Bogens $\leqq \pi$ ist. Offenbar ist dann die Totalkrümmung seines inneren Bogens auch $\leqq \pi$.

L e m m a 1. *Die Maximalkrümmung des äußeren Bogens eines einfachen Mondes ist größer als die Minimalkrümmung seines inneres Bogens.*[2])

---

[1]) H. BRUNN, Über Ovale und Eiflächen, *Inauguraldissertation München* 1887, S. 7; GYULA (JULIUS) SZ.-NAGY, Ein Beweis des Vierscheitelsatzes, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, 52 (1943), 198—200.

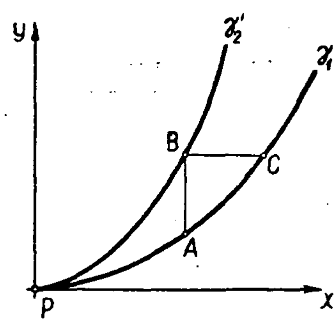
[2]) In den zitierten Arbeiten von H. BRUNN und GY. SZ.-NAGY ist nur bewiesen, daß die Maximalkrümmung des äußeren Bogens nicht kleiner ist, als die Minimalkrümmung des inneren Bogens.

Beweis: Ist $\gamma_2$ der äußere und $\gamma_1$ der innere Bogen des einfachen Mondes $M$, so ist es möglich, durch die Ecken $A_1$ und $A_2$ zwei parallele Geraden $g_1$ und $g_2$ so zu legen, daß sie die beiden Bogen nur in den Ecken treffen. Verschiebt man $\gamma_2$ in der Richtung dieser parallelen Geraden so, daß $\gamma_2$ über $\gamma_1$ passiert, so geht $\gamma_2$ schließlich in einen Bogen $\gamma_2'$ über, der ganz auf der konkaven Seite von $\gamma_1$ liegt, mit $\gamma_1$ aber mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Die gemeinsamen Punkte von $\gamma_1$ und $\gamma_2'$ bilden eine geschlossene Menge $U$ (die möglicherweise aus einem einzigen Punkte besteht). Es sei $P$ ein Punkt am Rande von $U$. In $P$ trennen sich $\gamma_1$ und $\gamma_2'$. In dem Punkte $P$ berühren sich diese Bögen, weil die Ecken von $M$ offenbar keine gemeinsamen Punkte von $\gamma_1$ und $\gamma_2'$ sein können. Wir wählen nun $P$ als Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen $x$-Achse eine gemeinsame Halbtangente von $\gamma_1, \gamma_2'$ bildet und so gerichtet ist, daß $\gamma_1$ und $\gamma_2'$ in der ersten Viertelebene (wo also die Koordinaten der Punkte nicht negativ sind) in der Umgebung vom $P$ keinen gemeinsamen Punkt (außer $P$) besitzen. Die $y$-Achse soll nach der konkaven Seite von $\gamma_1$ und $\gamma_2'$ zeigen (vgl. Figur 1). Die Bögen $\gamma_1$ und $\gamma_2'$ kann man durch die Gleichungen:

$$x_i = \int_0^s \left(\cos \int_0^s \varkappa_i(s)\, ds\right) ds \tag{1a}$$

$$y_i = \int_0^s \left(\sin \int_0^s \varkappa_i(s)\, ds\right) ds \tag{1b}$$

angeben[3]), wo sich der Index $i = 1$ auf $\gamma_1$ und der Index $i = 2$ auf $\gamma_2'$ bezieht, und wo $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die entsprechenden Krümmungen und $s$ die von $P$ gerechnete Bogenlänge bedeuten.




Figur 1.

Wir tragen auf $\gamma_2'$ und $\gamma_1$ vom Punkte $P$ aus Bögen von der gleichen Länge $s$ auf und wir behaupten, daß

$$y_2(s) > y_1(s). \tag{2}$$

---

[3]) Vgl. etwa DUSCHEK—MAYER, *Lehrbuch der Differentialgeometrie* I. (Leipzig und Berlin, 1930), S. 52.

Es sei $B$ der Punkt auf $\gamma_2'$ mit $\widehat{PB}=s$ (vgl. Figur 1) und projizieren wir $B$ senkrecht bzw. parallel zur $x$-Achse auf $\gamma_1$. So bekommen wir die Punkte $A$ bzw. $C$, für die die Ungleichungen

$$\widehat{PB}<\widehat{PA}+\overline{AB},\quad \overline{AB}<\widehat{AC} \tag{3}$$

bestehen. Die erste Ungleichung folgt sofort daraus, daß der konvexe Bogen $\widehat{PB}$ im Inneren des Konvexbereiches liegt, der von $\widehat{PA}, \overline{AB}$ und $\overline{BP}$ begrenzt wird. Aus (3) folgt nun $\widehat{PB}<\widehat{PC}$, und das beweist die Ungleichung (2).

Es sei nun $\delta>0$ so klein gewählt, daß

$$\int_0^\delta \varkappa_i(s)\,ds<\frac{\pi}{2} \qquad (i=1,2) \tag{4}$$

besteht, und daß $\varkappa_i(s)$ im Intervall $0<s<\delta$ stetig ist. Wäre in diesem Intervall

$$\varkappa_2(s)\leqq\varkappa_1(s), \tag{5}$$

so bestände nach (1b) und (4)

$$y_2(s)-y_1(s)=\int_0^s\left(\sin\int_0^s\varkappa_2 ds-\sin\int_0^s\varkappa_1 ds\right)ds\leqq 0$$

im Widerspruch zur Ungleichung (2). Es gibt also Werte von $s$, für die $\varkappa_2(s)>\varkappa_1(s)$, und das beweist die Richtigkeit von Lemma 1.

Wir wollen jetzt das Analogon des Lemmas von H. Brunn im Raum formulieren. Unter einem *räumlichen Mond* $M_r$ verstehen wir eine geschlossene konkave Fläche, die aus zwei konvexen Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ mit stetigem Gauß'schen Krümmungsmaß besteht und die außer ihrer Schnittlinie — die eine sich nicht schneidende geschlossene Raumkurve ist — keinen weiteren gemeinsamen Punkt haben. Wenn eine der sphärischen Bilder von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ das andere enthält, dann wird diejenige Fläche, deren sphärisches Bild das größere ist, *äußere Fläche* des Mondes genannt; die andere ist die *innere Fläche*. Sind die sphärischen Bilder gleich, so ist die äußere Fläche diejenige, die an der konvexen Seite der anderen liegt. Der räumliche Mond ist *einfach*, wenn das sphärische Bild der äußeren Fläche auf einer Halbkugel liegt.

Das Analogon des Hilfssatzes von H. Brunn für die räumlichen Monde ist das folgende:

Lemma 2. *Das Maximum des Gauß'schen Krümmungsmaßes bzw. das Maximum der mittleren Krümmung der äußeren Fläche eines einfachen räumlichen Mondes $M_r$ ist nicht kleiner als das Minimum des Gauß'schen Krümmungsmaßes, bzw. das Minimum der mittleren Krümmung der inneren Fläche.*

Beweis. Bezeichne $\mathfrak{F}_1$ bzw, $\mathfrak{F}_2$ die äußere, bzw. innere Fläche von $M_r$, weiter bezeichne $S$ die Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$. Da $M_r$ einfach ist, kann man durch die Punkte von $S$ parallele Geraden legen, die $\mathfrak{F}_2$ nur in den

Punkten der Schnittlinie $S$ treffen. Es entsteht somit eine Zylinderfläche, die $M_r$ in ihrem Inneren enthält. Wenn man die äußere Fläche $\mathfrak{F}_2$ von $M_r$ parallel mit den Erzeugenden der Zilinderfläche auf die Weise bewegt, daß $\mathfrak{F}_2$ über $\mathfrak{F}_1$ passiert, so erreicht $\mathfrak{F}_2$ schließlich eine Stellung $\bar{\mathfrak{F}}_2$, in der $\bar{\mathfrak{F}}_2$ die Fläche $\mathfrak{F}_1$ an der konkaven Seite berührt. Offenbar ist ein Berührungspunkt $P$, den wir nach der Bewegung erhalten haben, immer ein innerer Punkt des Mondes ($P \notin S$).

Die Tangentenebene der Fläche $\bar{\mathfrak{F}}_2$ im Punkt $P$ ist hiernach mit der von $\mathfrak{F}_1$ identisch. Wenn $N$ eine gemeinsame Normalebene von $\mathfrak{F}_1$ und $\bar{\mathfrak{F}}_2$ im gemeinsamen Berührungspunkt $P$ ist, dann folgt wegen der innerlichen Berührung, daß die Krümmung des in $N$ liegenden Normalschnittes von $\bar{\mathfrak{F}}_2$ nicht kleiner, als die des in $N$ liegenden Normalschnittes von $\mathfrak{F}_1$ ist. Bedeutet also $\varkappa_1$ die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes von $\mathfrak{F}_1$ im Berührungspunkt $P$, $\varkappa_2$ die von $\bar{\mathfrak{F}}_2$ in $P$, und liegen die beiden Normalschnitte in einer gemeinsamen Ebene, so ist

$$\varkappa_2 \geqq \varkappa_1. \tag{6}$$

Bezeichnen $K_i'$ und $K_i''$ die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}_i$ $(i=1,2)$, so kann man $\varkappa_i$ nach der Formel von EULER in der Form

$$\varkappa_i = K_i' \cos^2 \varphi_i + K_i'' \sin^2 \varphi_i \qquad (i=1,2) \tag{7}$$

darstellen, wo $\varphi_i$ den Winkel des Normalschnittes mit der ersten Hauptrichtung von $\mathfrak{F}_i$ im Punkt $P$ bedeutet. Bestimmt die zu $N$ senkrechte Normalebene $\bar{N}$ die Normalschnitte mit den Krümmungen $\bar{\varkappa}_i$ $(i=1,2)$, so folgt aus der Gleichung (7) $\left(\text{wegen } \bar{\varphi} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$, daß

$$\frac{1}{2}(\varkappa_i + \bar{\varkappa}_i) = H_i \qquad (i=1,2)$$

ist, wo $H_i = \frac{1}{2}(K_i' + K_i'')$ die mittlere Krümmung von $\mathfrak{F}_i$ bedeutet. Da neben (6) auch

$$\bar{\varkappa}_2 \geqq \bar{\varkappa}_1 \tag{8}$$

gültig ist, so folgt nach (6) und (8), daß $H_2 \geqq H_1$ im Punkte P besteht, wonach die zweite Hälfte von unserem Lemma 2 bewiesen ist.

Um auch dessen erste Hälfte beweisen zu können, berechnen wir $\varkappa_i \bar{\varkappa}_i$. Da neben (7) auch

$$\bar{\varkappa}_i = K_i' \sin^2 \varphi_i + K_i'' \cos^2 \varphi_i \qquad (i=1,2)$$

gilt, so ist wegen $\cos^4 \varphi_i = (1 - \sin^2 \varphi_i)^2$:

$$\varkappa_i \bar{\varkappa}_i = K_i' K_i'' + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_i)^2 (K_i' - K_i'')^2 \qquad (i=1,2).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $\varkappa_i \bar{\varkappa}_i \geqq K_i' K_i''$ ist. Nach (6) und (8) besteht dann die Ungleichung

(9) $$\varkappa_2\bar{\varkappa}_2 \geqq \varkappa_1\bar{\varkappa}_1 \geqq K_1'K_1'',$$

wenn wir für die Richtungen der betrachteten Normalebenen gerade die Hauptrichtungen von $\bar{\mathfrak{F}}_2$ im Punkte $P$ wählen.

Betrachten wir jetzt die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}_2$ im Punkt $P$, so bekommen wir aus (9)

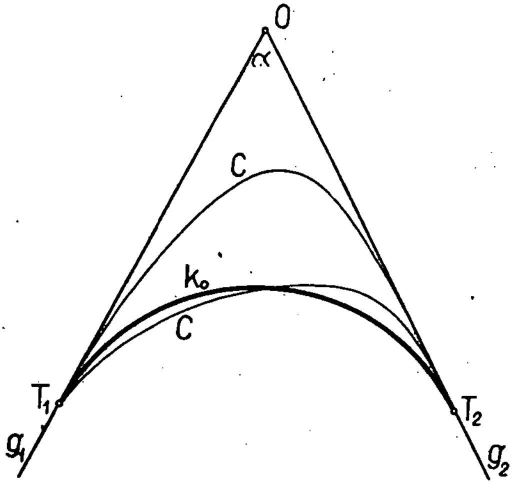
$$K_2'K_2'' \geqq K_1'K_1''$$

und das beweist den zweiten Teil von Lemma 2.

Vermutlich kann auch im Lemma 2 das Zeichen „$\geqq$“ durch „$>$“ ersetzt werden, doch sollte dazu eine viel feinere Überlegung benutzt werden.

## § 2. Die Extremaleigenschaften der Kreise und der Kugel.

**1.** Es sei $\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ ein Winkel mit dem Scheitel $O$. Auf jedem Schenkel von $\alpha$ sei je ein Punkt $T_1, T_2$ gegeben, so daß $\overline{OT_1} = \overline{OT_2}$. Wir bezeichnen die von $T_1$ bzw. $T_2$ ausgehenden Halbgeraden der Schenkel von $\alpha$ mit $g_1$ bzw. $g_2$.




Figur 2.

Einen Bogen $C$ werden wir *zulässig* nennen, wenn er die Endpunkte $T_1, T_2$ und in diesen die Halbtangenten $g_1, g_2$ hat, und wenn seine Tangente stetig ist. Für die Krümmung von $C$ sollen dieselben Bedingungen erfüllt werden, wie bei den Monden, außerdem soll $C$ im Dreieck $OT_1T_2$ liegen.

Wir betrachten folgende Probleme: *Es soll derjenige unter den zulässigen Bögen $C$ bestimmt werden, dessen maximale Krümmung am kleinsten ausfällt, und auch derjenige, dessen minimale Krümmung am größten ausfällt.*

Sei $k_0$ der Kreisbogen, mit der Krümmung $\varkappa_0$, der die Schenkel von $\alpha$ in den Punkten $T_1, T_2$ berührt und sonst im Innern des Dreiecks $OT_1T_2$ liegt (vgl. Figur 2). Es besteht der

Satz 1. *Bedeutet $\varkappa(s)$ die Krümmung eines zulässigen Bogens $C$ ($C \neq k_0$), so besteht die Ungleichung*

$$\max_s \varkappa(s) > \varkappa_0 > \min_s \varkappa(s), \tag{10}$$

*also ist $k_0$ die einzige Lösung beider Extremalprobleme.*

Beweis: Durchschneidet $C$ den Kreis $k_0$, so entsteht mindestens ein einfacher Mond, wo $C$ der äußere Bogen, und ein einfacher Mond, wo $C$ der innere Bogen ist. Dann folgt Satz 1 aus Lemma 1.

Schneidet aber $C$ den Kreis $k_0$ nicht, so bilden $C$ und $k_0$ einen einfachen Mond, dessen Bogen einander in $T_1$ berühren. Wenn $C$ der äußere Bogen ist, so folgt die erste Ungleichung von (10) wieder aus Lemma 1, während die zweite Ungleichung von (10) aus der Tatsache folgt, daß sich $C$ vom Kreis $k_0$ in einem Punkt $P^*$ (möglicherweise in $T_1$) trennen muß. In der Umgebung von $P^*$ gibt es dann Punkte von $C$, wo die Krümmung von $C$ kleiner ist als diejenige von $k_0$. Ist endlich $C$ der innere Bogen, so folgt (10) wieder nach Lemma 1 bzw. aus der Berührung in einem Punkte $Q^*$, wo $C$ und $k_0$ sich trennen.

Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

2. Das Analogon des Problems im dreidimensionalen Raum kann leicht formuliert und auf Grund des Lemmas 2 gelöst werden.

Es soll $\mathfrak{G}_k$ einen geraden Kreiskegel bedeuten, auf dessen Erzeugenden wir vom Spitzpunkt des Kegels aus gleich lange Strecken auftragen. Die Endpunkte bilden einen Kreis, den wir mit $k_0$ bezeichnen wollen. Wir bezeichnen nun als *zulässige* Eiflächen diejenigen *offenen Eiflächen* (die also einen Teil einer geschlossenen Eifläche bilden), die den Kegel $\mathfrak{G}_k$ längs $k_0$ berühren (d. h. die Erzeugenden von $\mathfrak{G}_k$ sind Tanganten der zulässigen Eiflächen), und deren Gesamtkrümmung $< 2\pi$ ist. Offenbar sind diese offenen Eiflächen einfach.

*Es soll diejenige unter den zulässigen Eiflächen $\mathfrak{F}$ bestimmt werden, deren maximale (minimale) Gauß'sche bzw. mittlere Krümmung am kleinsten (größten) ausfällt.*

Es soll nun $\mathfrak{K}_0$ die den Kegel $\mathfrak{G}_k$ längs $k_0$ berührende Kugelfläche bezeichnen, deren Gesamtkrümmung $< 2\pi$ ist. Bedeutet $r$ den Radius der Kugelfläche $\mathfrak{K}_0$, so besteht der

Satz 2. *Ist $K$ bzw. $H$ die Gauß'sche bzw. mittlere Krümmung einer zulässigen Eifläche $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \neq \mathfrak{K}_0$), so ist:*

$$\max K \geqq \frac{1}{r^2} \geqq \min K, \tag{11a}$$

$$\max H \geqq \frac{1}{r} \geqq \min H. \tag{11b}$$

*Für die Kugelfläche $\mathfrak{K}_0$ (möglicherweise auch für andere Flächen) erreicht also die Maximal- bzw. Minimalkrümmung der zulässigen Eiflächen den kleinsten bzw. größten Wert.*

Beweis des Satzes 2. Nach Lemma 2 folgt dieser Satz unmittelbar, da eine beliebige zulässige Fläche $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{K}_0$ zusammen einen einfachen räumlichen Mond bildet, deren Flächen einander längs $k_0$ berühren. Wir können jetzt weiter in analoger Weise verfahren, wie beim Beweis des Satzes 1.

*(Eingegangen am 1. Dezember 1953.)*