Eine Formel für gewisse symmetrische Polynome.

Von ALFRED STÖHR in Göttingen.

$x_1, x_2, \ldots$ seien Unbestimmte; alle anderen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen nichtnegative ganze Zahlen. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ seien fest gewählt. Der Quotient der Determinante

$$D = \left| x_r^{a_1}\, x_r^{a_2} \ldots x_r^{a_n} \right| \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

und des Differenzenprodukts

$$\varDelta = \prod_{1 \leqq l < k \leqq n} (x_k - x_l)$$

ist offenbar eine ganze rationale symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$; es sei die Aufgabe gestellt, diese durch die elementarsymmetrischen Funktionen auszudrücken. Sei $\sigma_0 = 1$ und sei σ_i für $1 \leqq i \leqq n$ die elementarsymmetrische Funktion i-ten Grades von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sei $m \geqq 1$ und $m \geqq a_n - n + 1$. Die Zahlen $b_1 < b_2 \ldots < b_m$ seien so bestimmt, daß $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ eine Permutation der Zahlen $0, 1, \ldots, n+m-1$ ist. Wir behaupten, daß die folgende Formel gilt:

$$D/\varDelta = \sum{}' \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\, \sigma_{n+c_1-b_1}\, \sigma_{n+c_2-b_2} \ldots \sigma_{n+c_m-b_m}.\text{[1]}$$

Σ' bedeutet dabei, daß über alle diejenigen Permutationen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ summiert wird, die für $i = 1, 2, \ldots, m$ die Ungleichungen $0 \leqq b_i - c_i \leqq n$ erfüllen, und $\operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ bedeutet das Vorzeichen der betreffenden Permutation.

---

[1]) Diese Formel verallgemeinert eine Aufgabe aus G. PÓLYA und G. SZEGŐ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925), Bd. 2, Abschn. VII, Nr. 10, Seite 99 und 302; ebendort (Abschn. V, Nr. 48, Seite 45 und 229) befindet sich eine Aufgabe über das Vorzeichen der Determinante D. Von A. OSTROWSKI und N. G. TSCHEBOTAREFF stammt der Satz, daß D nicht verschwindet, wenn die x_r paarweise verschiedene q-te Einheitswurzeln sind (q Primzahl und $> a_n$), vgl. A. OSTROWSKI, Über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteten Potenzreihen, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung*, **35** (1926) 269—280, insbesondere S. 274—277.

Beweis. In der folgenden Determinante durchlaufe der Index r die Werte $1, 2, \ldots, n+m$. Es ist

$$\frac{1}{\Delta} | 1 \; x_r \; x_r^2 \ldots x_r^{n+m-1} | = \frac{1}{\Delta} \prod_{1 \leqq l < k \leqq n+m} (x_k - x_l) =$$

$$= \left(\frac{1}{\Delta} \prod_{1 \leqq l < k \leqq n} (x_k - x_l) \right) \cdot \left(\prod_{n+1 \leqq l < k \leqq n+m} (x_k - x_l) \right) \cdot \left(\prod_{k=n+1}^{n+m} \prod_{l=1}^{n} (x_k - x_l) \right) =$$

$$= 1 \cdot \sum \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m) \, x_{n+1}^{c_1} x_{n+2}^{c_2} \ldots x_{n+m}^{c_m} \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} (\sigma_0 x_k^n - \sigma_1 x_k^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n);$$

dabei wird über alle Permutationen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ summiert. Faßt man die linke und rechte Seite der Gleichung als Funktion von $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ auf (mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Parametern), so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von $x_{n+1}^{b_1} x_{n+2}^{b_2} \ldots x_{n+m}^{b_m}$:

$$\operatorname{sgn}(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot D/\Delta =$$

$$= \sum{}' \operatorname{sgn}(c_1, c_2, \ldots, c_m) \prod_{i=1}^{m} (-1)^{n+c_i-b_i} \sigma_{n+c_i-b_i},$$

wo $\operatorname{sgn}(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ das Vorzeichen derjenigen Permutation ist, die $0, 1, \ldots, n+m-1$ in $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ überführt. Die Behauptung ist also bewiesen, wenn

$$(*) \qquad \operatorname{sgn}(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m) \prod_{i=1}^{m} (-1)^{n+c_i-b_i} = +1$$

gezeigt ist.

Indem man in der Reihe $0, 1, \ldots, n+m-1$ nacheinander für $i = 1, 2, \ldots, n$ jeweils a_i mit allen denjenigen kleineren Zahlen vertauscht, die von $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ verschieden sind, hat man insgesamt $\sum_{i=1}^{n} (a_i - i + 1)$ solche Vertauschungen auszuführen, und die Reihe $0, 1, \ldots, n+m-1$ wird dadurch in $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ übergeführt. Also ist die linke Seite von (*) gleich

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{n} (a_i - i + 1) + \sum_{i=1}^{m} (n + c_i - b_i)}.$$

Der Exponent ist gerade, denn mod 2 ist

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - i + 1) + \sum_{i=1}^{m} (n + c_i - b_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=1}^{n} (i-1) + mn + \sum_{i=1}^{m} c_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i + mn + \sum_{i=0}^{m-1} i = (n+m)(n+m-1) \equiv 0.$$

(Eingegangen am 5. März 1954.)