Über die Divergenz der Fourierreihen.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

A. G. DŽVARSEJŠVILI[1]) hat den folgenden Satz bewiesen: *Ist die Funktion $f(x) \in L$ in der abgeschlossenen Menge $E \subset [-\pi, \pi]$ gleich 0, so konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ in jedem Punkte größter Dichte von E nach 0, wenn die Bedingung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f; \delta_k) < \infty \tag{1}$$

erfüllt ist, wo δ_k $(k = 1, 2, \dots)$ die Ergänzungsintervalle von E und $\omega(f; \delta_k)$ die Schwankung von $f(x)$ in δ_k bezeichnen.

In dieser Note werden wir beweisen, daß dieser Satz nicht mehr gilt, wenn man die Bedingung (1) wegläßt. Es gilt nämlich die folgende Behauptung:

Es existiert eine abgeschlossene Menge $E \subset [-\pi, \pi]$ und eine stetige Funktion $f(x)$ so, daß $f(x)$ in E überall verschwindet, $x = 0$ ein Punkt größter Dichte von E ist, und die Fourierreihe von $f(x)$ im Punkte $x = 0$ divergiert.

B e w e i s. Es ist klar, daß die positiven ganzen Zahlen p_k, q_k so bestimmt werden können, daß für die Größen

$$u_k = \pi/p_k, \quad h_k = 2\pi/q_k \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{2}$$

die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$0 < \dots < u_k < \dots < u_1 \leqq \pi; \tag{3}$$

$$h_k \leqq u_k - u_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \dots); \tag{4}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} h_k = o(u_{m+1}); \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{u_{k+1}} = \infty. \tag{6}$$

Wir betrachten die offenen Intervalle

$$I_k = (u_{k+1}, u_{k+1} + h_k), \quad I_{-k} = (-u_{k+1} - h_k, -u_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Auf Grund von (3) und (4) ist $I_k \cap I_l = 0$ $(k \neq l)$. Es seien

$$G = \dots \cup I_{-2} \cup I_{-1} \cup I_1 \cup I_2 \cup \dots$$

---

[1]) A. G. DŽVARSEJŠVILI, Über ein Konvergenzkriterium der Fourierreihe, *Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR*, **11** (1950), 403—407. (Russisch.) (Verf. kennt dieses Ergebnis nur aus dem Referat in *Math. Reviews*, **14** (1953), 635.)

und $E=[-\pi,\pi]-G$. Die Menge E ist abgeschlossen und $x=0$ ist ein Punkt größter Dichte von E. Ist nämlich $u_{m+1}<h\leqq u_m$, so gilt nach der Definition von G

$$\frac{\operatorname{mes}(G\cap[-h,h])}{2h}\leqq\frac{h_m+h_{m+1}+\cdots}{u_{m+1}},$$

und so ist nach (5)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{mes}(G\cap[-h,h])}{2h}=0;$$

es folgt hieraus, daß $x=0$ ein Punkt größter Dichte von E ist.

Wir definieren die nach 2π periodische Funktion $f(x)$ folgenderweise:

$$f(x)=\begin{cases} a_k\sin m_k x, & x\in I_k \quad (k=1,2,\ldots);\\ -a_k\sin m_k x, & x\in I_{-k} \quad (k=1,2,\ldots);\\ 0, \quad x\in E, \end{cases}$$

wo die positive Zahl a_k und die natürliche Zahl m_k die folgenden Bedingungen erfüllen:

(7) $$\lim_{k\to\infty}a_k=0;$$

(8) $$m_k=c_kp_kq_k \qquad (c_k \text{ positive, ganze Zahl; } k=1,2,\ldots);$$

(9) $$|m_k-m_l|\geqq 2^{-1}\max(m_k,m_l) \text{ für } m_k\neq m_l.$$

Nach der Definition ist $f(x)$ eine gerade Funktion und nach (2) und (8) ist $f(x)$ stetig.

Es bezeichne $s_\nu(f;x)$ die ν-te Partialsumme der Fourierreihe von $f(x)$. Nach der bekannten Formel

$$s_\nu(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\nu t}{t}dt+o(1)$$

ergibt sich für $s_\nu(f;0)$ der folgende Ausdruck:

(10) $$s_\nu(f;0)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k}\sin m_kt\,\frac{\sin\nu t}{t}dt+o(1).$$

Wir betrachten die folgende Identität:

(11) $$\int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k}\frac{\sin^2 m_kt}{t}dt=\frac{1}{2}\int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k}\frac{\cos 2m_kt}{t}dt.$$

Mit Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhalten wir die Abschätzung:

$$\left|\int_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k}\frac{\cos 2m_kt}{t}dt\right|=\left|\frac{1}{u_{k+1}}\int_{u_{k+1}}^{\xi}\cos 2m_kt\,dt\right|\leqq\frac{1}{u_{k+1}m_k}\qquad(u_{k+1}\leqq\xi\leqq u_{k+1}+h_k)$$

und so gilt nach (11)

$$(12)\qquad \int\limits_{u_{k+1}}^{u_{k+1}+h_k} \frac{\sin^2 m_k t}{t}\,dt \geqq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{1}{u_{k+1}m_k}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$\int\limits_{u_{l+1}}^{u_{l+1}+h_l} \sin m_l t\,\frac{\sin m_k t}{t}\,dt = \frac{1}{u_{l+1}}\int\limits_{u_{l+1}}^{\zeta} \sin m_l t \sin m_k t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2u_{l+1}}\int\limits_{u_{l+1}}^{\zeta} [\cos(m_l-m_k)t-\cos(m_l+m_k)t]\,dt \qquad (u_{l+1}\leqq\zeta\leqq u_{l+1}+h_l).$$

Hieraus ergibt sich für $m_k \neq m_l$ die Ungleichung:

$$(13)\qquad \left|\int\limits_{u_{l+1}}^{u_{l+1}+h_l} \sin m_l t\,\frac{\sin m_k t}{t}\,dt\right| \leqq \frac{1}{u_{l+1}}\left[\frac{1}{|m_l-m_k|}+\frac{1}{m_l+m_k}\right] \leqq 3\,\frac{1}{u_{l+1}}\,\frac{1}{m_l}.$$

Auf Grund der Bedingung (6) gilt

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)=\infty,$$

und so existiert eine Folge von natürlichen Zahlen $1=N_1<\cdots<N_n<\cdots$, für die

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)=\infty$$

ist. Es sei $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n>0$, $n=1,2,\ldots$) eine Zahlenfolge, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(14)\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,$$

$$(15)\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_n\log\prod_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right)=\infty.$$

Es sei weiterhin $\{\nu_n\}$ ($n=1,2,\ldots$) eine Folge von natürlichen Zahlen, für die die Relationen

$$(16)\qquad \nu_{n+1}-\nu_n\geqq\nu_n/2 \qquad (n=1,2,\ldots);$$

$$(17)\qquad \nu_n=d_k^{(n)}p_kq_k \quad (d_k^{(n)} \text{ positive, ganze Zahl};\ n=1,2,\ldots;\ N_n\leqq k<N_{n+1});$$

$$(18)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(N_{n+1}-N_n)}{\nu_n}\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\frac{1}{u_{k+1}}<\infty$$

bestehen.

Wir bestimmen endlich die in der Definition $f(x)$ stehenden Größen a_k und m_k folgenderweise: es seien

$$a_k = \alpha_n, \quad m_k = \nu_n \quad \text{für } N_n \leqq k < N_{n+1}. \tag{19}$$

Nach (14), (16) und (17) sind die Bedingungen (7), (8) und (9) erfüllt.

Ist $N_n \leqq i < N_{n+1}$, so erhalten wir nach (10), (12) und (13):

$$s_{m_i}(f;0) \geqq \frac{1}{\pi}\alpha_n \log \prod_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(N_{n+1}-N_n)}{\nu_n}\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\frac{1}{u_{k+1}} + o(1).$$

Daraus ergibt sich nach (15) und (18), daß $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, s_\nu(f;0) = \infty$ ist.

Es ist klar, daß die Bedingung (1) in diesem Falle nicht erfüllt ist. $\omega(f;I_k)$ ist nämlich gleich $2a_k$ und nach (5) gilt $\lim\limits_{k\to\infty} h_k/u_{k+1} = 0$, und so ist für genügend großes k

$$\log\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right) \leqq 1.$$

Daraus ergibt sich nach (15) und (19) für genügend großes n:

$$\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\omega(f;I_k) \geqq 2\alpha_n \log \sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1}\left(1+\frac{h_k}{u_{k+1}}\right) \to \infty,$$

also ist $\sum\limits_k \omega(f;I_k) = \infty$.

(Eingegangen am 20. August 1954.)