Über die Ringe mit gegebenem Modul.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Für einen Ring R bezeichnen wir mit R^+ den Modul von R, d. h. den durch die Elemente von R gebildeten Modul.

Oft steht man vor dem Problem, einen gegebenen Modul durch passende Definition einer Multiplikation

$$\alpha\beta(\in M) \qquad (\alpha, \beta \in M)$$

zu einem Ring zu machen, d. h. die Ringe R mit der Eigenschaft

$$R^+ = M \tag{1}$$

zu bestimmen. Jeden solchen Ring R nennen wir einen *auf dem Modul* M *aufgebauten Ring.* Als klassisches Beispiel können wir die Algebren nennen die nämlich auf einem Vektorraum aufgebaute Ringe sind (ausgestattet mit gewissen Operatoreigenschaften). BEAUMONT[1]) hat unlängst einen anderen, wichtigen Fall erledigt, wo nämlich M die direkte Summe von zyklischen Moduln ist. In beiden dieser Fälle hat M eine Basis, obwohl in verschiedenem Sinne. Wir wollen das Problem allgemeiner lösen, indem wir für M einen Operatormodul zulassen und in diesem die Existenz einer Basis nicht annehmen. Um das Fehlen einer Basis zu ersetzen, werden wir ein System erzeugender Elemente für M zu Hilfe nehmen, was natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Es sei also M ein Operatormodul über einem Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement e als Operatorbereich. Die Operation bezeichnen wir als linksseitiges Operatorprodukt:

$$a\alpha(\in M) \qquad (a \in \mathfrak{R}, \alpha \in M). \tag{2}$$

Dabei sollen die üblichen Operatoreigenschaften

$$e\alpha = \alpha, \tag{3}$$

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \tag{4}$$

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{5}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha) \tag{6}$$

gelten. (Die linke Seite von (6) bedeutet $(ab)\alpha$. Allgemeiner soll $ab\cdots r\alpha\beta\cdots\varrho = (ab\cdots r)(\alpha\beta\cdots\varrho)$ sein.)

---

[1]) R. A. BEAUMONT, Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups, *Duke Math. Journal,* 15 (1948), 367—369.

Als Lösungen unseres Problems betrachten wir dann alle Ringe R, für die außer (1) auch noch die (ebenfalls übliche) Operatoreigenschaft

$$a\alpha\beta = a\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot a\beta \tag{7}$$

gilt.

Wie gesagt, nehmen wir in M ein System von erzeugenden Elementen zu Hilfe, das wir kurz durch

$$\omega_i \tag{8}$$

angeben, wobei i die Elemente einer „Indexmenge" $\mathfrak{J}$ durchläuft. (Wie i, so auch j, k, r, s, t sollen stets Elemente von $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Diese werden auch als „oberer Index" verwendet. Exponenten zur Bezeichnung von Potenzen werden in dieser Arbeit gar nicht gebraucht.) Die über (8) gemachte Annahme soll bedeuten, daß sich alle Elemente von M als

$$a^i\omega_i \tag{9}$$

schreiben lassen, wobei das gleichzeitige Auftreten von i als oberer und unterer Index bedeutet, daß man für alle i $(\in\mathfrak{J})$ zu summieren hat (wie das in der Tensorrechnung üblich ist); selbst a^i bezeichnet für jedes i ein Element von $\mathfrak{R}$ mit der Einschränkung, daß unter allen a^i $(i\in\mathfrak{J})$ nur endlich viele von 0 verschiedene Elemente vorkommen. (Diese Bedeutung von a^i soll für die ganze Arbeit beibehalten werden, ferner sollen auch $b^i, b^j, \ldots$ von ähnlicher Bedeutung sein.)

Wir bemerken folgendes. Ist in M eine (beiderseits) distributive Multiplikation definiert, so gilt wegen (6), (7) für das Produkt von zwei beliebigen Elementen von M offenbar

$$a^i\omega_i\cdot b^j\omega_j = a^i b^j\omega_i\omega_j. \tag{10}$$

Gibt man ferner alle Produkte $\omega_i\omega_j$ nach (9) als

$$\omega_i\omega_j = c_{ij}^k\omega_k \tag{11}$$

an, so schreibt sich (10) wegen (4), (5), (6) als

$$a^i\omega_i\cdot b^j\omega_j = a^i b^j c_{ij}^k\omega_k. \tag{12}$$

Dabei bezeichnen die c_{ij}^k Elemente von $\mathfrak{R}$, unter denen für jedes Paar i, j $(\in\mathfrak{J})$ nur endlich viele von 0 verschieden sind. Solche Elemente c_{ij}^k nennen wir im allgemeinen *Strukturkonstanten*.

Hiernach können wir unser Problem endgültig so formulieren: Welchen Bedingungen müssen die Strukturkonstanten c_{ij}^k unterworfen sein, damit durch die Multiplikation (12) ein auf dem Modul M aufgebauter Ring definiert ist, wofür auch (7) gilt.

Um die Antwort formulieren zu können, nehmen wir den aus allen Systemen a^i bestehenden $\mathfrak{R}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$ zu Hilfe, in dem wir nämlich die Addition und das Operatorprodukt durch

$$(a^i) + (b^i) = a^i + b^i, \tag{13}$$

$$c(a^i) = ca^i \qquad (c\in\mathfrak{R}) \tag{14}$$

definieren. (Die Dimension von $\mathfrak{V}$ ist gleich der Mächtigkeit von $\mathfrak{J}$.) Diejenigen a^i, für die (9) gleich 0 ist, bilden offenbar einen Untermodul von $\mathfrak{V}$, den wir mit $\mathfrak{V}_0$ bezeichnen. Da wegen (4), (6) $c(a^i\omega_i) = ca^i\omega_i$ gilt, so folgt aus $a^i \in \mathfrak{V}_0$ auch $ca^i \in \mathfrak{V}_0$. Dies schreibt sich nach (14) als $c(a^i) \in \mathfrak{V}_0$. Hiernach ist der Untermodul $\mathfrak{V}_0$ von $\mathfrak{V}$ zuläßig. Wir nennen $\mathfrak{V}_0$ den *annullierenden* Modul (des Erzeugendensystems ω_i). Für ihn gilt offenbar die Isomorphie:

$$\mathsf{M} \approx \mathfrak{V}/\mathfrak{V}_0.$$

Nunmehr bewisen wir den folgenden:

Satz. *Damit im Modul* M *durch* (12) *eine eindeutige Multiplikation definiert wird, ist notwendig und hinrechend, daß*

$$a^i c_{ir}^j,\ a^i c_{ri}^j \in \mathfrak{V}_0 \qquad (a^i \in \mathfrak{V}_0,\ r \in \mathfrak{J}) \tag{15}$$

ist. Ist das der Fall, so ist die Multiplikation (12) *auch schon distributiv; ferner ist für die Assoziativität notwendig und hinrechend, daß*

$$c_{rs}^i c_{it}^j - c_{st}^i c_{ri}^j \in \mathfrak{V}_0 \qquad (r, s, t \in \mathfrak{J}) \tag{16}$$

ist. Hiernach sind (15), (16) *notwendig und hinrechend, damit die Multiplikation* (12) *einen auf* M *aufgebauten Ring* R *definiert. Für einen solchen Ring gilt die Operatoreigenschaft* (7) *dann und nur dann, wenn*

$$(ab - ba)c_{rs}^i \in \mathfrak{V}_0 \qquad (a, b \in \mathfrak{K};\ r, s \in \mathfrak{J}) \tag{17}$$

ist.

Bemerkung. Kurz gesprochen besagt dieser Satz, daß die den Bedingungen (15), (16), (17) befriedigenden Strukturkonstanten c_{ij}^k die sämtlichen Lösungen unseres Problems liefern.

Beweis. Die Forderung der Eindeutigkeit der Multiplikation (12) bedeutet, daß die rechte Seite nur von den beiden Faktoren der linken Seite abhängt. Das ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn insbesondere

$$a^i\omega_i \cdot \omega_r = 0, \quad \omega_r \cdot a^i\omega_i = 0 \qquad (a^i \in \mathfrak{V}_0,\ r \in \mathfrak{J}) \tag{18}$$

gelten. Da nach (3) $\omega_r = e\omega_r$ ist, so lassen sich die Gleichungen (18) nach (12) in der Form

$$a^i c_{ir}^j \omega_j = 0, \quad a^i c_{ri}^j \omega_j = 0$$

schreiben. Hieraus sieht man die Richtigkeit der Behauptung über (15).

Nunmehr nehmen wir (15) an. Aus (4), (5), (6) folgt, daß die Multiplikation (12) auch schon distributiv ist. Ferner folgt hieraus, daß Assoziativität dann und nur dann vorliegt, wenn für die Erzeugenden von M

$$\omega_r\omega_s \cdot \omega_t = \omega_r \cdot \omega_s\omega_t \qquad (r, s, t \in \mathfrak{J})$$

gilt. Diese Gleichung schreibt sich nach (12) zunächst als

$$c_{rs}^i \omega_i \cdot \omega_t = \omega_r \cdot c_{st}^i \omega_i,$$

dann als

$$c_{rs}^i c_{it}^j \omega_j = c_{st}^i c_{ri}^j \omega_j,$$

d. h. wegen (5) als

$$(c^i_{rs}c^j_{it}-c^i_{st}c^j_{ri})\omega_j=0.$$

Dies besagt dasselbe wie (16), weshalb wir nur noch die Behauptung über (17) zu beweisen haben.

In unserem Ring R ist (7) wegen (3) bis (6) und (12) offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn insbesondere

$$a(b\omega_r\cdot\omega_s)=b\omega_r.\ a\omega_s$$

gilt. Dies schreibt sich wieder nach (12) als

$$a(bc^i_{rs}\omega_i)=bac^i_{rs}\omega_i,$$

d. h. nach (6) und (5) als

$$(ab-ba)c^i_{rs}\omega_i=0.$$

So sind wir eben zur Bedingung (17) gekommen. Das beendet den Beweis des Satzes.

1. Beispiel. Es sei M ein Vektorraum über $\mathfrak{K}$ und ω_i $(i\in\mathfrak{J})$ eine Basis von M. Für diesen Fall werden durch den Satz eben die auf dem Vektorraum M aufgebauten Algebren R über $\mathfrak{K}$ charakterisiert. Da jetzt $\mathfrak{V}_0=0$ ist, so ist (15) trivial erfüllt. Die übriggebliebenen (16), (17) sind eben die bekannten Bedingungen, damit durch (12) wirklich eine Algebra R definiert wird. (Ist dabei der Grundring $\mathfrak{K}$ kommutativ, so bleibt (17) weg. Das ist bekanntlich stets der Fall, wenn man fordert, daß R ein Einselement hat.)

2. Beispiel. Es sei $\mathfrak{K}$ der Ring der ganzen Zahlen (d. h. M ein „Modul ohne Operatoren"), ferner sei M die direkt Summe von zyklischen Moduln:

$$\mathrm{M}=\sum_{i\in\mathfrak{J}}\{\omega_i\},$$

wobei $\{\omega_i\}$ den durch ω_i erzeugten Modul bezeichnet. Mit anderen Worten ist ω_i $(i\in\mathfrak{J})$ eine Basis von M. Man definiere $o(\alpha)$ $(\alpha\in\mathrm{M})$ als das nichtnegative Erzeugende des durch diejenigen ganzen Zahlen a gebildeten Ideals, für die $a\alpha=0$ ist. Man nennt $o(\alpha)$ die *Ordnung von* α. Für diesen Fall besteht $\mathfrak{V}_0$ aus denjenigen Systemen $a^i(a^i\in\mathfrak{K},\ i\in\mathfrak{J})$, für die

$$o(\omega_i)\,|\,a^i \qquad (i\in\mathfrak{J})$$

gilt. Folglich lauten jetzt die Bedingungen (15), (16) des Satzes so:

(19) $$o(\omega_j)\,|\,o(\omega_i)c^j_{ir},\ o(\omega_i)c^j_{ri} \qquad (i,j,r\in\mathfrak{J}),$$

(20) $$o(\omega_j)\,|\,c^i_{rs}c^j_{it}-c^i_{st}c^j_{ri} \qquad (j,r,s,t\in\mathfrak{J}).$$

(Die Bedingung (17) ist wegen der Kommutativität von $\mathfrak{K}$ trivial erfüllt.) Diese Bedingungen (19), (20) drücken eben den erwähnten Satz von BEAUMONT[1]) aus.

(Eingegangen am 20. August 1954.)