Ein Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen Lip α und Lip (β, p).

Von GÉZA FREUD in Budapest.

Es sei $f(x) \in L$ eine nach 2π periodische Funktion und $f \in$ Lip (β, p), d. h.

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = O(h^\beta),$$

mit $1 < p \leqq 2$ und $\beta - \frac{1}{p} > 0$. Nach einem bekannten Satze von O. SZÁSZ[1]) ist die Fouriersche Reihe von $f(x)$ für jedes x absolut konvergent. Da eine absolut konvergente Fourier-Reihe eine stetige Funktion darstellt, ist somit $f(x)$ fast überall gleich einer stetigen Funktion $g(x)$. Wir zeigen, daß diese stetige Funktion sogar einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Satz. *Es sei $f \in L$ eine nach 2π periodische Funktion, $f \in$ Lip (β, p) mit*

$$1 < p \leqq 2 \quad \textit{und} \quad \beta \leqq 1, \beta - \frac{1}{p} > 0.$$

Dann ist $f(x)$ fast überall gleich einer Funktion $g(x)$, welche jeder Klasse Lip α *mit $0 < \alpha < \beta - \frac{1}{p}$ zugehört.*

Beweis. Es sei

$$f(x) \sim \Sigma (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

und

$$g(x) \equiv \Sigma (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, daß für jedes α mit $0 < \alpha < \beta - \frac{1}{p}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (|a_k| + |b_k|) < \infty.^{2)}$$

Ist also $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der betrachteten Fourier-Reihe, dann ist

$$|g(x) - s_n(x)| = O(n^{-\alpha}).$$

Hieraus folgt nach einem wohlbekannten Satze von S. N. BERNSTEIN, daß $g \in$ Lip α, w. z. b. w.

(Eingegangen am 27. September 1954.)

[1]) O. SZÁSZ, Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, *Math. Annalen*, 100 (1928), 530—536.

[2]) Vgl. A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 143, Beispiel 6.