Bibliographie.

Trygve Nagell, Introduction to number theory, 309 pages, Almqvist & Wiksell, Stockholm — John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

Ein mit großer Liebe und Schriftkunst geschriebenes Buch von einem echten Zahlentheoretiker. Wohl trägt das Buch den Titel einer Einführung, dem es auch getreu bleibt, so führt es doch trotz seines ermäßigten Umfanges auch an einige hohe Gipfel der neuen zahlentheoretischen Untersuchungen hinauf.

Die erste Hälfte des Buches enthält in vier Kapiteln die wichtigsten Elemente der Zahlentheorie ungefähr mit dem gewohnten Inhalt, nämlich die Teilbarkeitslehre, Theorie der Kongruenzen, das quadratische Reziprozitätsgesetz, doch wurden auch schon in dem hier verarbeiteten Lehrstoff mehrere Einzeluntersuchungen aufgenommen, die weniger für die Grundlegung nötig, aber an sich interessant und somit geeignet sind, durch ihren Reiz die Begeisterung des Lesers für die Zahlentheorie zu erwecken. Solche Teile sind: Beweis der Irrationalität von e und π nach Niven, die ganzwertigen Polynome, Thues Satz über die Representation der Restklassen mod p durch rationale Zahlen, einige Spezialfälle des Dirichletschen Satzes über die arithmetische Progression, Verf.-s eigene, auch von O. Ore gewonnene Resultate über die Anzahl der Lösungen der Kongruenzen höheren Grades mod p^α. [Ref. bemerkt hierzu die wesentlichen Verschärfungen dieser Resultate bei Gy. Sándor, Über die Anzahl der Lösungen einer Kongruenz, *Acta Math.*, **87** (1952), 13—16.] Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den komplexen Einheitswurzeln, insbesondere mit der Irreduzibilität und den Primteilern des Kreisteilungspolynoms, dem Spezialfall $ny-1$ des Dirichletschen Satzes nach Bauer's Verfahren, der Berechnung der Gaußschen Summen. Das sechste und siebente Kapitel sind den Diophantischen Gleichungen zweiten bzw. höheren Grages gewidmet, wo im letzteren teils auch Lösungen in algebraischen Zahlkörpern zugelassen werden. Hier werden viele klassische Gleichungen ($x^2-Dy^2=1, C$; $ax^2+by^2+cz^2=0$; $x^4-y^4=z^2$; $x^3+y^3+z^3=0$; $x^7+y^7+z^7=0$, usw.) erörtert ($x^2-Dy^2=-1$ wenig gestreift). Außerdem bereichtet Verf. hier (größtenteils ohne Beweis) auch über seine eigenen, teils durch seine Schule fortgesetzten feinen Untersuchungen über die allgemeine binäre kubische Gleichung dritten Grades, ferner über den diesbezüglichen Satz von Mordell und über die Sätze von Thue—Siegel—Maillet bezüglich der Gitterpunkte von algebraischen Kurven höheren Grades. Es ist zu bedauern, daß Verf. diesen interessanten Bericht nicht mit ausführlichen bibliographischen Angaben begleitet, sondern nur die Namen der einzelnen Forscher und die Jahreszahl der Forschungen angibt. Das letzte Kapitel reproduziert den berühmten elementeren Beweis von Selberg für den Primzahlsatz. Leider wird dabei weder der Anteil von Erdős an dem ersten Selbergschen Beweis, noch seine diesbezügliche Arbeit erwähnt [P. Erdős, On a new method in elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci, U. S. A.*, **35** (1949), 374—384]. Hierüber s. man auch das Referat von A. E. Ingham in *Math. Reviews*, **10** (1949), 595—596.

Das ganze Buch ist in sehr klarem Styl gehalten, das Aneignen des Lehrstoffes wird durch viele Beispiele erleichtert. Viele Anmerkungen im Text, ferner den einzelnen Kapiteln angefügten insgesamt 180 Aufgaben von verschiedener Schwere erhöhen den Wert beträchtlich und tragen viel dazu bei, daß das Buch neben seinem Hauptzweck, eine Einführung in die Zahlentheorie zu geben, ein nützliches Werk auch für die Fachmänner ist. Auch die Ausstattung des Buches ist sehr geschmacksvoll.

L. R.

Rédei László, Algebra. I. kötet [**L. Rédei, Algebra.** vol. I], 639 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1954. (Hungarian.)

Although systematic abstract algebra can look back only at a past of hardly four decades, yet, following the traces of the pioneering work of VAN DER WAERDEN, there is already a great number of excellent works discussing from different viewpoints the chapters comprising multifarious investigations of abstract algebra. RÉDEI's book brings a new colour into this literature of rich variety from several points of view. Characteristic of the book is the striving after a systematisation of highest degree, the exquisite realisation of which has been no little task considering the extensive material treated in the work. After having introduced the necessary notions, every problem is treated in the most general manner, it is only afterwards that the author passes to the consideration of special cases. His book gives very much new in its contents, and exposes several results that have not been treated as yet in textbooks. In addition, there is much new in its method and way of treatment too. The author's style is concise but clear; the conciseness never affecting intelligibility. The beginner too, will understand the book without difficulty. For the specialist, on the other hand, RÉDEI's work will play the role of a most serviceable handbook.

The first chapter contains the fundamentals of set theory, which are made use of later on. After exposing the elementary notions and some elementary facts concerning them, certain equivalents of the axiom of choice are treated especially dwelling upon the significance of the lemma of KURATOWSKI—ZORN, the lemma of TEICHMÜLLER—TUKEY and the well-ordering theorem of ZERMELO for the investigations on modern algebra.

The second chapter deals with the general discussion of certain algebraic structures, namely with semigroups (abstract sets with an associative multiplication), groups, rings and (skew) fields. Attention must be drawn to the clear definition of the notions of generating system, minimal generating system and basis. The latter is defined for commutative semigroups with unit element (groups), as an independent generating system of the structure. After the discussion of sub-structures follows the introduction of isomorphism and homomorphism, and the notion of compatible classification with help of which the factor-structures and the general homomorphism theorem, as special cases the notions of normal subgroup and ideal are obtained. This chapter contains the definition of the Rédeian skew product of structures, which means a new structure obtained in a certain way from other structures. This construction is immediately made use of for the extension with unit element of a ring, and for the construction of factor- and difference-structures. The chapter ends with the discussion of the two isomorphism theorems, the lemma of ZASSENHAUS and the theorem of JORDAN—HÖLDER—SCHREIER.

In respect of contents and treatment alike, one of the chapters of greatest originality is the third, which discusses structures with operators. After the exposition of fundamental properties a construction of skew product throws light upon the fact that the usual conditions for operators are the only possible natural conditions. The theory of the Schreier extension of structures is also treated with the use of skew product at the same time for groups and rings. In the first case even the generalisation is made known where the factor-structure is a semigroup. As a simple application of the skew product is obtained the cross product of NOETHER too. The introduction of the notions of direct product and direct sum follows, with the fundamental decomposition theorems. Semigroups, groups and rings, free or defined by equations, and the corresponding notions for structures with operators are introduced by a very elegant new method. Beside vector spaces and algebras the author introduces the notion of double vector space and double algebra. For these there are proved similar theorems as for the former, and important structures are derived from them as special cases: semigroups-ring, polynomial-ring, complete matrix ring, alternating ring, complex ring, and the field of quaternions. In the further part of the chapter beside the exhaustive treatment of the double algebras mentioned before, linear transformations and groups and the simpleness of alternating groups are discussed. At last, determinant theory is built up in general rings with unit element.

The fourth chapter investigates the connection between ideals and divisibility in case of arbitrary rings. Making use of the results attained, a very elegant treatment is given to several theorems of elementary number theory in euclidean rings (non necessarily commutative), the factorisation problems of the rings of polynomials over a skew field, and the theorem of Gauss. The last paragraph contains an elegant and simple exposition of the number theory of quaternion integers.

The centre of the fifth chapter is the fundamental theorem of finite abelian groups, and as a counterpart of it, the theorem of Hajós (which seems to be independent of the fundamental theorem). The latter is proved with the essentially simplified method of Rédei—Szele. The chapter is closed by an investigation of the multiplicative group of finite cyclical rings with unit element.

The following sixth chapter brings the proof of the fundamental theorem of finitely generated abelian groups based on the discussion of determinant divisors and elementary divisors. Then follows the exposition of the theory of systems of linear equations over a skew field making use of Steinitz's Austauschsatz.

The seventh chapter begins with the classical algebraic investigations on rings of polynomials over a ring with unit element (differential quotient, fundamental theorem of symmetric polynomials, resultant, discriminant, formulas of Newton and Waring, interpolation). Then we get acquainted with the Kronecker method of factorization of a polynomial over an integral domain and with Eisenstein's general irreducibility theorem. Very remarkable moments are the discussion of the Kronecker—Hensel theorem describing every ideal of the polynomial rings over commutative euclidean rings, and the description of the rings generated by a single element with help of this theorem.

In the next chapter the theory of commutative fields is discussed. The main point of this chapter is the classical theory of Steinitz in modern presentation (lemma of Kuratowski—Zorn is used instead of well-ordering theorem). Concerning finite fields, the theorem of König—Rados and Wedderburn are also made known here.

The investigation of ordered structures occupies the ninth chapter. After the discussion of ring extensions with unit element we find the results of Johnson, Szele and Artin—Schreier giving necessary and sufficient conditions that a module, ring, skew field or field can be ordered. This is followed by the discussion of archimedean and non-archimedean ordering and absolute value.

The tenth chapter deals with valuation theory. After the general theory of perfect fields follows the classical investigation of the field of real and complex numbers including the fundamental theorem of classical algebra. Then follow the archimedean, exponential, discrete and p-adic valuations and their applications, in particular the theorems of Ostrowski on the valuations of the rational number field and on archimedean valued fields.

In the last chapter we encounter the theory of Galois and its applications. The first application is the theorem of Stickelberger on the discriminant of a polynomial over a finite field, then, as a consequence of it, we obtain the proof of the quadratic reciprocity law. Other important applications follow, the discussion of cyclotomic polynomials, the investigation of the solvability of equations, and of geometrical constructibility. Worth mentioning is in the case of cubic and quartic equations over finite fields of characteristic greater than three the decision of the question as to how many of the roots of the equation are contained in the base field with help of the discriminant. The chapter is closed by the simple new proof of the theorem stating that every Galois-field has a normal basis.

Even this brief survey perhaps is able to illustrate how extensive a material is comprised in Rédei's book in a very elegant and on many points new treatment. We hope that the following volumes of this work will enrich mathematical literature in a similar degree within a short time.

T. Szele—J. Szendrei

Rudolf Fueter, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. II), 180 Seiten, Basel, Verlag Birkhäuser, 1945.

Das vorliegende Buch bietet eine Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Das Ziel des Buches ist, wie aus dem Vorwort hervorgeht, diejenigen Kenntnisse aus der analytischen Geometrie zu vermitteln, die der Studierende sich in seinen ersten Semestern zum Verständnis der übrigen mathematischen und physikalischen Vorlesungen aneignen muß. Vermöge des elementaren und einführenden Charakters des Buches wird im wesentlichen metrische Geometrie betrachtet, kurz berührend einige projektivgeometrische Grundbegriffe (wie die homogenen Koordinaten des Punktes, das Prinzip der Dualität). Die Betrachtung geht bis zu den Raumflächen zweiten Grades: es werden ihre speziellen Gleichungen und ihre grundlegenden Eigenschaften besprochen.

Der allgemeine Fall der quadratischen Formen von drei Variablen wird nicht behandelt, es wird nur das Resultat der Hauptachsentransformation ausgesprochen.

In der Darstellungsweise gelingt es dem Autor die vortrefflich berücksichtigten didaktischen Gesichtspunkte mit vollständiger Exaktheit und Klarheit aufs glücklichste zu vereinen.

J. Szendrei

W. J. Trjitzinsky, Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables (Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule CXXV), 93 p., Paris, Gauthier-Villars, 1954.

Le but de cet ouvrage est d'appliquer les méthodes de totalisation à la solution de l'équation $u_{xx}+u_{yy}=-f(x,y)$ de Poisson, ou plutôt à la généralisation suivante de celle-ci: la fonction $f(x,y)$ étant donnée dans le rectangle ouvert S, on cherche toutes les fonctions $u(x,y)$ telles que les dérivées $u_x(x,y)$ et $u_y(x,y)$ soient continues sur S et que la dérivée ordinaire de la fonction d'intervalle $F(I)=\int\limits_{(I)}\frac{\partial u}{\partial n}ds$ (la dérivée étant prise selon la normale intérieure et l'intégrale étant calculée le long du contour de l'intervalle I au sens positif) soit égale à $f(x,y)$ partout sur S.

En supposant que, pour une fonction $f(x,y)$ donnée, ce problème possède au moins une solution $u(x,y)$, l'auteur démontre à l'aide d'un théorème de Denjoy qu'il existe un ensemble fermé F, non dense sur S, tel que $f(x,y)$ soit bornée sur tout ensemble fermé $F_1\subset S-F$. Il construit ensuite une suite finie ou dénombrable de cercles $\Gamma_i\subset S-F$, $\Gamma_i\Gamma_j=0$ pour $i\neq j$, et tels que tout ensemble fermé $F_1\subset S-F$ n'ait de points communs qu'avec un nombre fini des cercles Γ_i. Il donne alors une décomposition $f(x,y)=f_0(x,y)+\psi(x,y)$ de façon que $f_0(x,y)$ soit sommable sur $S-F$ et que $\psi(x,y)$ soit continue sur $S-F$, qu'elle ne dépende que de la distance au centre dans chaque cercle Γ_i et qu'elle s'annule à l'extérieur de ceux-ci. Des fonctions de ce type figurent dans une note de Brelot; en donnant une forme plus précise aux résultats de Brelot, l'auteur parvient à démontrer que toute solution $u(x,y)$ du problème doit avoir sur $S-F$ la forme $u(x,y)=u_0(x,y)+w(x,y)$, où

$$u_0(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S-F} f_0(\xi,\eta)\log r^{-1}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

avec $r(x,y;\xi,\eta)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ et où $w(x,y)$ est de type suivant: $w(x)$ est continue sur $S-F$; à l'intérieur du cercle Γ_i on a

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma_i}\psi(\xi,\eta)\log r^{-1}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+h_i(x,y),$$

où $h_i(x,y)$ est harmonique à l'intérieur de Γ_i; tandis que sur $S-F-\Sigma\Gamma_i$ on a $w(x,y)=$

$= v(x, y)$, la fonction $v(x, y)$ étant harmonique sur $S-F$, exception faite des centres (x_i, y_i) des cercles Γ_i; en (x_i, y_i) $v(x, y)$ possède la partie principale $c_i \log r^{-1}(x, y; x_i, y_i)$ avec

$$c_i = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Pour trouver toutes les solutions du problème, il faut donc déterminer l'ensemble F, construire les fonctions $f_0(x, y)$ et $\psi(x, y)$ de la façon indiquée par l'auteur, construire une fonction $v(x, y)$ par la méthode de Brelot, calculer les fonctions $h_i(x, y)$, chacune étant la solution d'un problème de Dirichlet à l'intérieur du cercle Γ_i, et on obtient toutes les solutions sur l'ensemble $S-F$ en ajoutant à $v(x, y)$ une fonction harmonique quelconque. En prolongeant par continuité les fonctions obtenues sur l'ensemble F, on obtient les solutions cherchées, mais, en général, d'autres fonctions aussi, parmi lesquelles les solutions du problème sont encore à choisir. La question du choix convenable de la fonction harmonique ajoutée à $v(x, y)$ reste encore ouverte et ne semble plas être très facile.

Ákos Császár

Louis de Broglie, Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire (Traité de physique théorique et de physique mathématique, ouvrages réunis par Jean-Louis Destouches, tome III), VIII + 302 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

L'ouvrage reproduit l'essentiel du cours que l'auteur a professé à l'École Normale Supérieure depuis 1934. On y trouve — dans le cadre d'un manuel — la théorie de Maxwell et la théorie des électrons, la théorie de la relativité restreinte, la mécanique statistique classique, la théorie du rayonnement, la théorie quantique de l'atome de Bohr—Sommerfeld, la mécanique ondulatoire, la théorie de Dirac et des statistiques quantiques. L'ouvrage se recommande par la clarté de l'exposition et par la manière didactique dont l'auteur a ordonné sa matière.

J. I. Horváth

Vera Myller-Lebedev, Lecţii de algebră [Vorlesungen über Algebra], 396 Seiten, Auflage der Akademie der Rumänischen Volksrepublik, Bukarest, 1953. (Rumänisch.)

Ein im Universitätsunterricht gut verwendbares Lehrbuch der Algebra, welches nicht nur den Gegenstand der einführenden Vorlesungen (Determinanten; Begriff der reellen und der komplexen Zahlen; lineare, bilineare, quadratische und hermitesche Formen; Polynome, Eliminationen usw.), sondern auch die Galoissche Theorie umfaßt. Die Behandlungsweise steht derjenigen von Perron's *Algebra* am nahesten. Eine reiche Aufgabensammlung (auf 150 Seiten) erhöht den Wert des Buches.

J. Szendrei

Wolfgang Haack, Darstellende Geometrie, Bd. I-II (Sammlung Göschen Bd. 142—143), 110 + 129 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1954. —DM 2.40 + 2.40 (geheftet).

Band I beginnt mit einer allgemeinen Einleitung über die Rolle und die geschichtliche Entwicklung der darstellenden Geometrie. Dann folgt ein sehr guter und systematischer Überblick der wichtigsten Darstellungsmethoden. Die weiteren Kapiteln dieses Bandes behandeln die Grundaufgaben der Zweitafelprojektion samt zahlreichen Anwendungen auf die ebenflächigen Körper, die Theorie der axialen Affinität, und auf Grund dieser Theorie einige Ellipsenkonstruktionen. Inzwischen macht uns Verf. mit einem speziellen System der Kavalierperspektive und mit dem Übertragungsverfahren in dieses System bekannt. Dieses Verfahren findet später mehrere Anwendungen zur Herstellung anschaulicher Bilder.

In den ersten drei Kapiteln vom Band II handelt es sich um die Zweitafelprojektion der Dreh- und Schraubenflächen. Das zweite von ihnen behandelt die für die technischen

Anwendungen wichtigsten Durchdringungsaufgaben von Zylindern, Kegeln und Kugeln, mit besonderem Rücksicht auf die zerfallenden und die in einen einzigen Kegelschnitt entarteten Durchdringungen. Im letzten Kapitel dieses Bandes sind die Grundelementen und praktische Anwendungen der kotierten Projektion beschrieben.

Ein drittes Band über die Zentralprojektion ist in Vorbereitung.

Es zeigt sich aus den Fragestellungen und dem Stil dieses Werkes, daß Verf. besonders die in der alltäglichen Praxis vorkommenden Problemem der Darstellenden Geometrie vor Augen gehalten hat. Bei der Darstellung der Ebene macht er uns z. B. aufmerksam darauf, daß Ebenen mit Spurendarstellung bei technischen Anwendungen nur selten vorkommen, und dementsprechend spielen die Ebenen mit Spurendarstellung in der ganzen Erörterung keine grundlegende Rolle. Auch die Umlegung der Ebene wird zuerst um eine Hauptlinie ausgeführt.

Während die praktischen Gesichtspunkte in erfreulicher Weise gut in den Vordergrund der ganzen Behandlung gestellt sind, werden die theoretischen Gesichtspunkte nicht überall mit der gleichen Aufmerksamkeit berücksichtigt. Es ist auffallend, daß für die Konstruktion der Durchdringung ebenflächiger Körper nur einzelne Beispiele gegeben sind, und es fehlen die allgemeinen Überlegungen. Die theoretische Ungenauigkeit ist besonders auffallend an den folgenden Stellen: in Bd. I, bei der Orthogonalitätsbedingung einer Geraden zu einer Ebene (wo der Verf. eine — übrigens wohlbekannte — Bedingung als notwendige beweist, trotzdem als hinreichende ausspricht); in Bd. II, bei der Behandlung der Tangenten und der Tangentenebene einer krummen Fläche in einem Punkt (wo er das Problem der singulären Punkte noch nicht aufwirft), oder bei der Behandlung der Ellipse als Kegelschnitt (wo aus den vorigen nicht der Satz an der Seite 32 mit kursivem Druck, sondern gerade seine Umkehrung folgt, und der Beweis für die Äquivalenz der beiden Definitionen fehlerhaft ist).

Trotz diesen kleineren Schönheitsfehlern besitzt das Werk einen großen praktischen und didaktischen Wert, den die zahlreichen schönen und übersichtlichen Abbildungen noch erhöhen.

G. Szász

W. Maak, Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen (Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. I, 1. Teil, Heft 7/I), 26 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner, 1953.

Als J. v. Neumann 1934 den ursprünglichen Bohrschen Begriff der fastperiodischen (fp.) Funktionen zum Begriff der „fp. Funktionen auf Gruppen" erweitert und die innigen Zusammenhänge dieses Begriffes mit den beschränkten Matrixdarstellungen der Gruppe entdeckt hat, wurde die Theorie der fp. Funktionen mit der Gruppentheorie verknüpft. Natürlich wurde sie damit noch kein Kapitel der Algebra geworden, doch scheint es durchaus berechtigt, über sie im Rahmen des Algebra-Bandes der Enzyklopädie zu berichten.

Verf. ist einer der besten Kenner und erfolgreichsten Forscher dieses Gebietes, dem wir auch ein Lehrbuch der modernen Theorie der fp. Funktionen verdanken (Springer-Verlag, 1950).

Die fp. Funktionen werden in dem vom Verf. stammenden „kombinatorischen" Wege eingeführt und es wird auf die Existenz anderer Einführungsmöglichkeiten nur kurz hingewiesen. Das ist zu bedauern, da man in einem Enzyklopädieartikel mindestens die ursprünglichen Definitionen hätte finden können. Es wird dann ausführlich über den Mittelwertsatz und über die Zusammenhänge mit den beschränkten Darstellungen berichtet (Orthogonalitätseigenschaften; Fourier-Reihen; Eindeutigkeitssatz; Aufspaltung invarianter Moduln; Approximationssatz; Summierungsmethoden der Fourier-Reihen, usw.). Dann werden verschiedene Verallgemeinerungen besprochen (Weyl-fp. Funktionen, ω-fp. Funktionen; allgemeinere Wertebereiche: fp. Funktionen auf Halbgruppen). Endlich werden unter „Anwendungen und Anwendungsmöglichkeiten" die Bohrschen fp. Funktionen und die Kugelfunktionen erwähnt, die maximal- und minimal-fp. Gruppen definiert und diskutiert, und über die Dualitätssätze von PONTRJAGIN und TANNAKA berichtet. Obwohl die Besprechung der minimal-fp. Gruppen es vielleicht nahelegen hätte, den Gelfand—Rajkovschen Satz über die Vollständigkeit des Systems aller irreduzibler unitärer (endlich oder unendlichdimensionaler) Darstellungen einer lokalkompakten Gruppe zu erwähnen, doch geht der Bericht nicht über die Rahmen endlichdimensionaler Darstellungen.

B. Sz.-N.

M. L. Dubreil-Jacotin—L. Lesieur—R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques (Cahiers scientifiques, fasc. XXI), VIII + 386 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1953. — 5500 fr.

Ce livre, conformément à son titre, se compose de trois parties. La première partie, élaborée par M. CROISOT, traite des fondaments de la théorie des treillis abstraits. Après une étude détaillée de la théorie des ensembles partiellement ordonnés l'auteur passe aux cas spéciaux des demi-treillis et des treillis. Ensuite l'auteur fournit la définition algébrique de ces structures et démontre l'indépendance des équations qui les définissent. Le chapitre suivant développe les propriétés les plus importantes des demi-treillis et treillis complets et conditionnellement complets. L'auteur traite ensuite d'homomorphismes, d'isomorphismes et des produits cardinaux des treillis et des demi-treillis, puis il discute en détail la structure des treillis modulaires, distributifs et semi-modulaires. On y trouve plusieurs théorèmes propres à l'auteur, très importants pour les treillis de longueur infinie, notamment quant à la définition de la semi-modularité et quant à l'exposition des implications logiques entre telles propriétés qui sont équivalentes dans le cas des treillis de longueur finie. Un exposé sur les treillis complémentés et relativement complémentés et la discussion de l'union-indépendance terminent la première partie du livre.

La seconde partie, élaborée par Mme DUBREIL-JACOTIN, traite des structures algébriques ordonnées (c'est-à-dire des structures dans lesquelles une relation d'ordre est aussi définie), et particulièrement des demi-groupes demi-réticulés et des groupes réticulés. Cette partie commence par développer les propriétés générales et les éléments particuliers (éléments entiers, premiers, primaires, etc.) des groupoïdes et des groupes ordonnés. Dans le chapitre suivant on définit le résiduel et en précise les propriétés fondamentales; on traite des groupoïdes résidués (particulièrement des groupoïdes résidués demi-réticulés et réticulés) et discute la théorie des demi-groupes ordonnés archimédiens. Deux chapitres sont consacrés à la théorie générale des congruences et des idéaux et des rapports entre congruences et idéaux dans les différentes structures; en passant, il est aussi question des congruences régulières par rapport à la relation d'ordre et de la structure du treillis des idéaux. Enfin nous prenons connaissance du problème de la décomposition multiplicative, finie et univoque, des éléments des structures algébriques ordonnées, en tenant particulièrement compte du cas des demi-groupes demi-réticulés.

La troisième partie, élaborée par M. LESIEUR, est consacrée aux applications géométriques de la théorie des treillis. La notion de "treillis géométrique" est introduite à l'aide des variétés linéaires et d'une condition de couverture ("l'union d'une variété linéaire et d'un point couvre la variété linéaire"); la dimension de ces treillis est définie à l'aide de l'union-indépendance abstraite. Après cette introduction il traite séparément des treillis géométriques à dimension finie et à dimension infinie, et il y démontre le théorème suivant très important: Pour qu'un treillis géométrique soit à dimension finie, il est nécessaire et suffisant qu'il satisfasse soit à la condition de chaîne ascendante, soit à la condition de chaîne descendante. La discussion générale se termine par l'énumération de quelques propriétés des produits cardinaux des treillis géométriques et par la théorie abstraite du parallélisme. L'auteur rappelle ensuite deux définitions équivalentes pour les treillis projectifs ou, autrement dit, pour les géométries projectives: l'une est conçue comme le complément du système d'axiomes des treillis géométriques généraux par le dual de la condition de couverture ci-dessus mentionnée, l'autre est définie par la condition supplémentaire de modularité. On passe alors aux géométries projectives à dimension finie et infinie et aux décompositions de ces géométries en géométries projectives irréductibles, aux géométries projectives affaiblies (où le dual de la condition de couverture est affaibli) et comme cas particulier de celles-ci aux géométries affines et affines généralisées. L'auteur expose en même temps dans ses détails la théorie du parallélisme appliquée aux géométries affines généralisées. Un chapitre séparé est réservé au développement analytique des géométries affines à deux dimensions, dans lequel des types spéciaux et leur caractérisation par la "structure algébrique associée" sont placés au premier plan. Le dernier chapitre fixe quelques rapports entre espaces vectoriels et géométries affines et projectives.

Cette revue de la matière traitée fait voir que l'ouvrage n'a pas l'ambition d'exposer les applications de la théorie des treillis de façon aussi exhaustive que l'a fait M. G. Birkhoff dans sa "Lattice theory". Son intention n'est que, d'une part, de développer les notions et les théorèmes fondamentaux de la théorie abstraite des treillis, et d'autre part, de traiter des applications algébriques et géométriques dont n'existait jusqu'à présent aucun ouvrage d'ensemble. Au cours des exposés ressortent bien les avantages de l'application des notions et des méthodes de la théorie des treillis.

Les traits principaux de l'ouvrage sont: l'analyse profonde des notions et des conditions des théorèmes au moyen de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis, l'interprétation sous plusieurs faces des concepts nouveaux en les douant de nombreuses propriétés caractéristiques, enfin le souci accordé aux détails. De tout ceci il résulte que le livre n'est pas d'une lecture aisée; mais, pour les lecteurs quelque peu instruits d'algèbre abstraite, l'étude en est aussi fructueuse qu'intéressante.

Chacun des chapitres est suivi de quelques exercices pour compléter et plus encore pour expliquer les résultats acquis.

G. Szász