

Über einseitige Approximation durch Polynome. I.

Von GÉZA FREUD in Budapest.

Einleitung.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet der folgende Satz von H. WEYL:

Es sei $f(x)$ eine in (a, b) definierte, beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jeder positiven Zahl ε zwei Polynome $p(x)$ und $P(x)$, so daß

$$(1) \quad p(x) \leq f(x) \leq P(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

und

$$\int_a^b [P(x) - p(x)] dx < \varepsilon$$

besteht.

H. WEYL [13] hat diesen Satz auf Probleme der Gleichverteilung der Zahlen modulo Eins erfolgreich angewandt. Später hat L. FEJÉR [2] denselben Satz zum Beweise der Konvergenz positiver mechanischer Quadraturverfahren benutzt. Wie G. SZEGÖ [12] bemerkte, lassen sich die Resultate von L. FEJÉR auf gewichtete mechanische Quadraturverfahren verallgemeinern, indem man den Weylschen Satz folgenderweise verallgemeinert:

Es sei $f(x)$ in bezug auf die monoton wachsende Funktion $\alpha(x)$ im Riemann—Stieltjesschen Sinne integrierbar. Dann kann man zu einer beliebigen positiven Zahl ε Polynome $p(x)$ und $P(x)$ finden, so daß (1) erfüllt ist, ferner

$$\int_a^b [P(x) - p(x)] d\alpha(x) < \varepsilon$$

besteht.

Eine dritte Anwendung dieses Satzes war die von J. KARAMATA [8] gegebene Herleitung des Tauberschen Satzes von G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD. Verfasser beschäftigte sich in einigen Arbeiten [3], [4], [5] mit dem Restglied dieses letzterwähnten Satzes. Um die entsprechenden Abschätzungen zu erhalten, war es erforderlich, für Funktionen $f(x)$ von spezieller Art eine von ε abhängige Schranke des Grades der Polynome $p(x)$ und $P(x)$ zu erhalten.

In dieser Arbeit wollen wir diese Sätze für allgemeinere Funktionenklassen beweisen, ferner bringen wir einige weitere Anwendungen, und endlich werden in einigen Fällen die Polynome vorgeschriebenen Grades konstruiert, die die bestmögliche Approximation in der geschilderten Weise liefern.

Es sei besonders hervorgehoben, daß die Polynome konstruiert werden, die die bestmögliche Approximation für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \xi, \\ x^{-1} & \text{für } \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

darstellen. Das ist genau die Approximationsfrage, die bei dem Karamataschen Beweise des Hardy—Littlewoodschen Satzes auftritt. Die Gewichtsfunktion kann dabei beliebig sein.

Definition. Es sei K_ν die Klasse der Funktionen $f(x)$, die im vorgeschriebenen Intervall (a, b) $\nu-1$ -mal stetig differenzierbar sind, und für welche $f^{(\nu-1)}(x)$ die Integralfunktion einer Funktion $f_\nu(x)$ von beschränkter Schwankung ist. Die Variation von $f_\nu(x)$ bezeichnen wir mit V_ν .

Satz 1. *Es sei $f(x) \in K_\nu$, dann gibt es Polynome $p_N(x)$ und $P_N(x)$ höchstens N -ten Grades, so daß*

$$p_N(x) \leq f(x) \leq P_N(x)$$

ist und

$$(2) \quad \int_a^b [P_N(x) - p_N(x)] \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} < \frac{A_\nu V_\nu}{N^{\nu+1}}$$

besteht, wobei A_ν eine nur von ν abhängige Zahl bedeutet.

Für die Zahlen A_ν werden numerische Abschätzungen angegeben. Wie schon von J. KOREVAAR bemerkt wurde, folgt aus einem Satze von S. NIKOLSKIJ [10], daß (2) größenordnungsmäßig nicht verbessert werden kann. Wir wiederholen den Beweis: Der Satz von NIKOLSKIJ behauptet, daß falls $f(x)$ $\nu-1$ -mal stetig differenzierbar ist und $f^{(\nu-1)}(x)$ die Integralfunktion einer solchen Funktion ist, welche höchstens Sprungstellen erster Art besitzt, aber wenigstens eine solche Sprungstelle tatsächlich besitzt, dann besteht für jedes Polynom $q_n(x)$ höchstens n -ten Grades die Ungleichung

$$\text{Max}_{a \leq y \leq b} \left| \int_a^y f(x) dx - q_n(y) \right| \geq \frac{H}{n^{\nu+1}},$$

wobei die Zahl H von n unabhängig ist.¹⁾ Es sei in diesem Satze

$$q_n(y) = \int_a^y p_N(t) dt \quad (n = N + 1),$$

¹⁾ In der Arbeit von NIKOLSKIJ wird auch die Abhängigkeit der Zahl H von ν und $f(x)$ angegeben. Das ist aber für unsere Zwecke belanglos.

dann ist wegen $f(x) \cong p_N(x)$

$$\text{Max}_{a \cong \nu \cong b} \left| \int_a^b f(x) dx - q_n(x) \right| = \int_a^b [f(x) - p_N(x)] dx,$$

also besteht a fortiori

$$\int_a^b [f(x) - p_N(x)] \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \cong \frac{H'}{(N+1)^{\nu+1}}$$

mit $H' = 2H/(b-a)$.

Unter den Anwendungen behandeln wir zwei Fragen: die Fehlerabschätzung von positiven mechanischen Quadraturen interpolatorischer Art, und Taubersche Sätze bezüglich der Laplace—Stieltjes-Transformation.

I. Beweis des Approximationsatzes.

Im weiteren können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $a = -1$, $b = +1$ ist. Der allgemeine Fall kann mittels einer affinen Transformation auf diesen zurückgeführt werden. Zuerst betrachten wir die Approximation der Funktionen:

$$(3) \quad g_\nu(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq \xi, \\ (x-\xi)^\nu & \text{für } \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

wobei ν eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet. Für gerade ν wurde die einseitige Approximation dieser Funktionen schon in einer früheren Arbeit des Verfassers [4] behandelt. Hier wird die Methode vereinfacht und die Rechnung bis zum numerischen Werte der auftretenden Konstanten verfolgt, weiter wird die Frage auch für ungerade ν gelöst, wozu einige neue Kunstgriffe benötigt werden.

Es sei $n > \nu + 1$ und wir bezeichnen mit

$$(4) \quad x_{kn} = \cos \frac{2(n-k)+1}{2n} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

die Wurzeln des Tschebyscheffschen Polynoms $T_n(x)$. Es sei ξ eine feste Zahl, $-1 < \xi < +1$, und wir wählen $\mu = \mu(n)$ in der Weise, daß

$$(5) \quad x_{\mu\nu} \cong \xi < x_{\mu+1, n}$$

besteht²⁾. Wir bezeichnen

$$(6) \quad r = \left[\frac{\nu+1}{2} \right].$$

²⁾ Wo $x_{0n} = -1$, $x_{n+1, n} = 1$ bedeutet.

Es sei $f_n(x)$ das Polynom höchstens $2(n-r)-2$ -ten Grades³⁾ für welches die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} f_n(x_{1n}) = \dots = f_n(x_{\mu+1, n}) = 0, & \quad f_n(x_{\mu+r+2, n}) = \dots = f_n(x_{nn}) = 1, \\ f'_n(x_{1n}) = \dots = f'_n(x_{\mu n}) = 0, & \quad f'_n(x_{\mu+r+2, n}) = \dots = f'_n(x_{nn}) = 0 \end{aligned}$$

bestehen. Ähnlicherweise sei $F_n(x)$ das Polynom ebenfalls höchstens $2(n-r)-2$ -ten Grades mit

$$(8) \quad \begin{aligned} F_n(x_{1n}) = \dots = F_n(x_{\mu-r-1, n}) = 0, & \quad F_n(x_{\mu n}) = \dots = F_n(x_{nn}) = 1, \\ F'_n(x_{1, n}) = \dots = F'_n(x_{\mu-r-1, n}) = 0, & \quad F'_n(x_{\mu+1, n}) = \dots = F'_n(x_{nn}) = 0. \end{aligned}$$

Diese Polynome wurden durch A. A. MARKOV [7] und T. J. STIELTJES [11] ersonnen, und zum Beweise des Separationssatzes bezüglich der Nullstellen von Orthogonalpolynomen angewandt. Bekanntlich gilt

$$(9) \quad f_n(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_{\mu+1, n}, \\ 1 & \text{für } x > x_{\mu+1, n}, \end{cases}$$

$$(10) \quad 0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \text{für } x_{\mu+1, n} \leq x \leq x_{\mu+r+2, n},$$

bzw.

$$(11) \quad F_n(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_{\mu n}, \\ 1 & \text{für } x > x_{\mu n}, \end{cases}$$

und

$$(12) \quad 0 \leq F_n(x) \leq 1 \quad \text{für } x_{\mu-r-1, n} \leq x \leq x_{\mu n}.$$

Wir betrachten jetzt die Polynome

$$(13) \quad \gamma_{nr}(x, \xi) = (x-\xi)^r f_n(x)$$

und

$$(14) \quad \Gamma_{nr}(x, \xi) = (x-\xi)^r F_n(x),$$

deren Grad infolge (6) höchstens $2n-1$ ist. Aus den Ungleichungen (9)–(12) erhält man, falls r eine gerade Zahl ist,

$$(15) \quad \gamma_{nr}(x, \xi) \leq g_r(x, \xi) \leq \Gamma_{nr}(x, \xi).$$

Nach einem klassischen Resultat von CH. HERMITE besteht für ein beliebiges Polynom $II_{2n-1}(x)$ höchstens $2n-1$ -ten Grades die Relation

$$(16) \quad \int_{-1}^{+1} II_{2n-1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n II_{2n-1}(x_{kn}).$$

Infolge der Definition der γ_{nr} und Γ_{nr} ist

$$\Gamma_{nr}(x_{kn}, \xi) = \gamma_{nr}(x_{kn}, \xi)$$

³⁾ Nach der Annahme $n > r + 1$ ist $n-r \geq 1$ und so ist $2(n-r)-2 \geq 0$.

für $k \leq \mu - r - 1$ und $k \geq \mu + r + 2$. Somit besteht

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} [L_{nr}(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=\mu-r}^{\mu-1} (x_{kn} - \xi)^r F_n(x_{kn}) + \frac{\pi}{n} \sum_{k=\mu}^{\mu+r+1} (x_{kn} - \xi)^r [1 - f_n(x_{kn})]. \end{aligned}$$

Wegen (4) und (5) ist

$$(17) \quad |x_{kn} - \xi| < \frac{(r+1)\pi}{n} \quad (\mu - r \leq k \leq \mu + r + 1)$$

Aus (10) und (12) folgt somit

$$(18) \quad \int_{-1}^{+1} [L_{nr}(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < 2 \left(\frac{\pi(r+1)}{n} \right)^{r+1}.$$

Die Ungleichungen (15) und (18) ergeben das erstrebte Resultat für die Funktionen $g_\nu(x, \xi)$, wenn ν eine gerade Zahl ist.

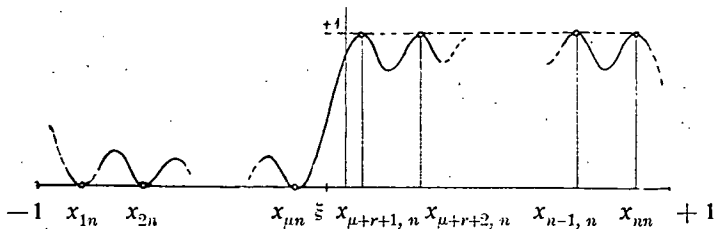
Der Beweis der entsprechenden Formeln für ungerade ν ist etwas verwickelter. Wir betrachten das Polynom $\varphi_n(x)$ höchstens $2(n-r)-1$ -ten Grades mit

$$(19) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x_{1n}) = \dots = \varphi_n(x_{\mu n}) = 0, & \quad \varphi_n(x_{\mu+r+1, n}) = \dots = \varphi_n(x_{nn}) = 1, \\ \varphi'_n(x_{1n}) = \dots = \varphi'_n(x_{\mu n}) = 0, & \quad \varphi'_n(x_{\mu+r+1, n}) = \dots = \varphi'_n(x_{nn}) = 0. \end{aligned}$$

Somit wurden $n-r$ Nullstellen von $\varphi'_n(x)$ vorgeschrieben, ferner fallen infolge des Rolleschen Satzes weitere $n-r-2$ Nullstellen in die Intervalle

$$(x_{1n}, x_{2n}), \dots, (x_{\mu-1, n}, x_{\mu n}), (x_{\mu+r+1, n}, x_{\mu+r+2, n}), (x_{n-1, n}, x_{nn}).$$

Da der Grad von $\varphi'_n(x)$ höchstens gleich $2(n-r)-2$ ist, gibt es keine weitere Nullstellen von $\varphi'_n(x)$. Damit ist der Verlauf des Polynoms $\varphi_n(x)$ bestimmt (vgl. Figur 1).



Figur 1.

Das wesentliche ist, daß

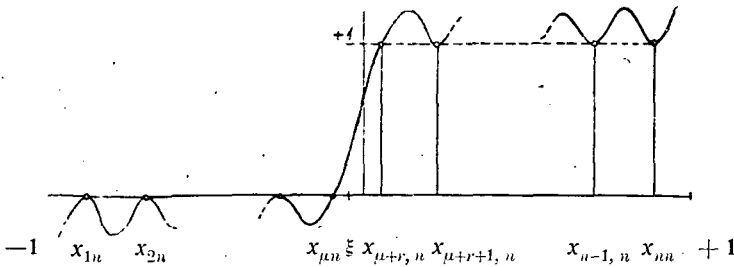
$$(20) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x) &\geq 0 \quad \text{für } x \leq x_{\mu n}, \\ \varphi_n(x) &\leq 1 \quad \text{für } x \geq x_{\mu+r+1, n} \end{aligned}$$

und

$$(21) \quad 0 \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu n} \leq x \leq x_{\mu+r+1, n}$$

bestehen. Weiter sei $\Phi_n(x)$ das Polynom höchstens $2(n-r)-1$ -ten Grades mit

$$\begin{aligned} \Phi_n(x_{1n}) = \dots = \Phi_n(x_{\mu n}) = 0, & \quad \Phi_n(x_{\mu+r, n}) = \dots = \Phi_n(x_{nn}) = 1, \\ \Phi'_n(x_{1n}) = \dots = \Phi'_n(x_{\mu-1, n}) = 0, & \quad \Phi'_n(x_{\mu+r+1, n}) = \dots = \Phi'_n(x_{nn}) = 0. \end{aligned}$$



Figur 2.

Eine ähnliche Überlegung wie bei $\varphi_n(x)$ zeigt, daß die Kurve von $\Phi_n(x)$ wie in Figur 2 verläuft, d. h.

$$(22) \quad \begin{aligned} \Phi_n(x) &\leq 0 \quad \text{für} \quad x \leq x_{\mu n}, \\ \Phi_n(x) &\geq 1 \quad \text{für} \quad x \geq x_{\mu+r, n} \end{aligned}$$

und

$$(23) \quad 0 \leq \Phi_n(x) \leq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu n} \leq x \leq x_{\mu+r, n}$$

ist. Es sei jetzt ν ungerade, und wir bilden die Polynome

$$(24) \quad \gamma_{nr}(x, \xi) = (x - \xi)^\nu \varphi_n(x)$$

und

$$(25) \quad \Gamma_{nr}^*(x, \xi) = (x - \xi)^\nu \Phi_n(x).$$

Infolge (20) und (21) gilt

$$(26) \quad g_r(x, \xi) \leq \gamma_{nr}(x, \xi) \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq +1.$$

Über die Polynome $\Gamma_{nr}^*(x, \xi)$ kann aber nur behauptet werden, daß

$$(27) \quad g_r(x, \xi) \leq \Gamma_{nr}^*(x, \xi) \quad \text{für} \quad x \leq x_{\mu n}, \quad x \geq x_{\mu+r, n}$$

und

$$(28) \quad |\Gamma_{nr}^*(x, \xi)| \leq \text{Max} |x - \xi|^\nu < (x_{\mu+r, n} - x_{\mu n})^\nu < \left(\frac{r\pi}{n}\right)^\nu \quad \text{für} \quad x_{\mu n} \leq x \leq x_{\mu+r, n}$$

ist. Aus der Definition von γ_{nr} und Γ_{nr}^* folgt, daß, analog zu (16),

$$\int_{-1}^{+1} [\Gamma_{nr}^*(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=\mu+1}^{\mu+r} (x_{kn} - \xi)^\nu [\Phi_n(x_{kn}) - \varphi_n(x_{kn})],$$

also wegen (21) und (23)

$$(29) \quad \int_{-1}^{+1} [F_{nr}^*(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \left(\frac{r\pi}{n}\right)^{r+1}$$

besteht.

Damit haben wir aber unseren Beweis noch nicht beendet, da im Intervall $(x_{\mu n}, x_{\mu+r, n})$ die Forderung $g_r(x, \xi) \leq F_{nr}^*(x, \xi)$ nicht erfüllt ist. Daher müssen wir zu F_{nr}^* noch ein passend gewähltes Polynom addieren.

Wir bezeichnen mit $l_{kn}(x)$ die Lagrangeschen interpolatorischen Grundpolynome, die zu den Tschebyscheffschen Abszissen (4) gehören, d. h. $l_{kn}(x)$ ist das Polynom höchstens $n-1$ -ten Grades mit

$$l_{kn}(x_{kn}) = 1 \quad \text{und} \quad l_{kn}(x_{in}) = 0 \quad (i \neq k).$$

Nach einem Lemma von P. ERDÖS und P. TURÁN ([1], S. 529) besteht (auch für ein beliebiges Grundpunktsystem)

$$(30) \quad l_{kn}(x) + l_{k+1, n}(x) \geq 1 \quad (x_{kn} \leq x \leq x_{k+1, n}).$$

Es sei jetzt

$$\omega_n(x) = \sum_{k=\mu}^{\mu+r-1} (l_{kn}(x) + l_{k+1, n}(x))^2.$$

Dann gilt wegen (30)

$$\omega_n(x) \geq 1 \quad \text{für} \quad x_{\mu n} \leq x \leq x_{\mu+r, n}$$

und $\omega_n(x)$ ist für alle Werte von x positiv. Unter Anwendung von (27) und (28) erhält man hieraus, daß das Polynom höchstens $2n-1$ -ten Grades

$$F_{nr}(x, \xi) = F_{nr}^*(x, \xi) + 2 \left(\frac{r\pi}{n}\right)^r \omega_n(x)$$

die Ungleichung (15) befriedigt. Es muß noch das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} [F_{nr}(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = \int_{-1}^{+1} [F_{nr}^*(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \left(\frac{r\pi}{n}\right)^r \int_{-1}^{+1} \omega_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Dies wurde für das erste Glied an der rechten Seite in Formel (29) erledigt. Zur Abschätzung des zweiten Gliedes beachte man, daß nach der Definition von $\omega_n(x)$

$$\omega_n(x_{kn}) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < \mu \quad \text{und} \quad k > \mu + r, \\ 1 & \text{für } k = \mu \quad \text{und} \quad k = \mu + r, \\ 2 & \text{für } \mu < k < \mu + r \end{cases}$$

gilt; $\omega_n(x)$ ist von höchstens $2n-2$ -tem Grade. Somit erhält man aus der

Hermitechen mechanischen Quadraturformel (16):

$$\int_{-1}^{+1} \omega_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2r\pi}{n},$$

also ist nach (29)

$$(31) \quad \int_{-1}^{+1} [L_{nr}(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < 5 \left(\frac{r\pi}{n} \right)^{r+1}.$$

Zusammenfassend erhalten wir aus (18) und (31), indem wir $r = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ beachten, daß Polynome $L_{nr}(x, \xi)$ und $\gamma_{nr}(x, \xi)$ von niedrigerem Grade als $2n$ konstruiert wurden, für welche (15) besteht und

$$(32) \quad \int_{-1}^{+1} [L_{nr}(x, \xi) - \gamma_{nr}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \begin{cases} 2 \left(\frac{(r+2)\pi}{2n} \right)^{r+1} & \text{für gerade } r, \\ 5 \left(\frac{(r+1)\pi}{2n} \right)^{r+1} & \text{für ungerade } r \end{cases}$$

gilt.

Der allgemeine Fall des Satzes I kann auf den somit erledigten speziellen Fall zurückgeführt werden. Die Funktion $f(x) \in K_r$ drücken wir mit der Taylorschen Formel aus:

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!} (x+1) + \dots + \frac{f^{(r-1)}(-1)}{(r-1)!} (x+1)^{r-1} + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-\xi)^{r-1} f_r(\xi) d\xi.$$

Hierbei ist $f^{(r-1)}(x)$ die Integralfunktion von $f_r(x)$, und diese letzte Funktion ist von beschränkter Schwankung. Mit einer partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-\xi)^{r-1} f_r(\xi) d\xi &= \frac{f_r(-1)}{r!} (x+1)^r + \frac{1}{r!} \int_{-1}^x (x-\xi)^r df_r(\xi) = \\ &= \frac{f_r(-1)}{r!} (x+1)^r + \frac{1}{r!} \int_{-1}^{+1} g_r(x, \xi) df_r(\xi) \end{aligned}$$

und somit wird

$$(33) \quad f(x) = H_r(x) + \frac{1}{r!} \int_{-1}^{+1} g_r(x, \xi) df_r(\xi),$$

wobei $H_r(x)$ ein Polynom höchstens r -ten Grades bedeutet. Bekanntlich kann $f_r(x)$ in der Form

$$f_r(x) = h_1(x) - h_2(x)$$

dargestellt werden, wobei $h_1(x)$ und $h_2(x)$ monoton nicht abnehmende Funktionen sind, deren gesamte Schwankung gleich der Schwankung V_ν von $f_\nu(x)$ ist. Nun können wir die gesuchten Approximationspolynome $p_N(x)$ und $P_N(x)$

explizit angeben: es sei $N > \nu + 1$, $n = \left[\frac{N+1}{2} \right]$,

$$(34) \quad p_N(x) = II_\nu(x) + \frac{1}{\nu!} \int_{-1}^{+1} \gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_1(\xi) - \frac{1}{\nu!} \int_{-1}^{+1} \Gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_2(x)$$

und

$$(35) \quad P_N(x) = II_\nu(x) + \frac{1}{\nu!} \int_{-1}^{+1} \Gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_1(\xi) - \frac{1}{\nu!} \int_{-1}^{+1} \gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_2(\xi).$$

Hierbei bedeutet (falls einige der x_{kn} mit Sprungstellen von h_1 oder h_2 zusammenfallen)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_1(\xi) &= \int_{-1}^{x_{1n}^-} \gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_1(\xi) + \\ &+ \gamma_{\nu\nu}(x, x_{1n}) [h_1(x_{1n} + 0) - h_1(x_{1n} - 0)] + \int_{x_{1n}^+}^{x_{2n}^-} \gamma_{\nu\nu}(x, \xi) dh_1(\xi) + \dots \end{aligned}$$

Die übrigen Integrale in (34) und (35) sind ähnlicherweise definiert.

Dann ist wegen (32)

$$(36) \quad \begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} [P_N(x) - p_N(x)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1}{\nu!} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\Gamma_{\nu\nu}(x, \xi) - \gamma_{\nu\nu}(x, \xi)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left[dh_1(\xi) + dh_2(\xi) \right] < \frac{C_\nu V_\nu}{N^{\nu+1}}, \end{aligned}$$

wobei infolge $n = \left[\frac{N+1}{2} \right]$, $n \geq \frac{N}{2}$, und

$$(37) \quad C_\nu = \begin{cases} \frac{2[(\nu+2)\pi]^{\nu+1}}{\nu!} & \text{(gerade } \nu), \\ \frac{5[(\nu+1)\pi]^{\nu+1}}{\nu!} & \text{(ungerade } \nu) \end{cases}$$

ist. Damit sind wir mit dem Beweise fertig. Wir wollen den Satz I mit Angabe der Konstante noch einmal formulieren:

Satz Ia. *Es sei im Intervall $[a, b]$ $f \in K_\nu$ und es sei V_ν die totale Schwankung von $f_\nu(x)$ in $[a, b]$. Dann gibt es Polynome $p_N(x)$ und $P_N(x)$ von höchstens N -tem Grade, so daß*

$$(38) \quad p_N(x) \leq f(x) \leq P_N(x)$$

für $a \leq x \leq b$ ist, und die Ungleichung

$$(39) \quad \int_a^b \left[P_N(x) - p_N(x) \right] \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^r \frac{C_r V_r}{N^{r+1}}$$

besteht, wobei C_r die in (37) definierte Konstante bedeutet.

II. Fehlerabschätzung mechanischer Quadraturverfahren.

Es soll jetzt ein mechanisches Quadraturverfahren betrachtet werden, welches das Integral

$$\int_a^b f(x) w(x) dx$$

(wobei $w \in L$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion bedeutet) mit den Ausdrücken

$$(40) \quad Q_r(f) = \sum_{k=1}^{m_r} \lambda_{kr} f(\xi_{kr}) \quad (r=1, 2, \dots)$$

approximiert. Es seien folgende zwei Voraussetzungen erfüllt:

a) $Q_r(f)$ ist interpolatorischer Art, d. h. es gibt eine monoton gegen Unendlich wachsende Zahlenfolge s_r , so daß $Q_r(f)$ die gewichteten Integrale von Polynomen höchstens s_r -ten Grades genau darstellt.

b) $Q_r(f)$ sei positiv, d. h. es seien

$$(41) \quad \lambda_{kr} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, m_r; r=1, 2, \dots).$$

Aus einem Satze von L. FEJÉR [2] erhält man, daß unter diesen Bedingungen für jede beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q_r(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

besteht. (FEJÉR betrachtete nur den Fall $w(x) \equiv 1$, die Verallgemeinerung bietet aber keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten.)

Satz II. Es seien

$$(42) \quad w(x) \leq \frac{M}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

$f \in K_r$, und wir bezeichnen die Schwankung von $f_r(x)$ in (a, b) mit $V_r(f)$. Dann ist

$$(43) \quad \left| Q_r(f) - \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^r M C_r \frac{V_r(f)}{s_r^{r+1}}.$$

Beweis: Es seien $p_{s_r}(x)$ und $P_{s_r}(x)$ die Polynome höchstens s_r -ten Grades, die infolge Satz Ia (38) und (39) erfüllen. Wegen (42) ist

$$\int_a^b \left[P_{s_r}(x) - p_{s_r}(x) \right] w(x) dx \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^r M C_r \frac{V_r(f)}{s_r^{r+1}}.$$

Ferner erhält man unter Beachtung der Positivität von λ_{kn}

$$\int_a^b p_{s_r}(x) w(x) dx = Q_r(p_{s_r}) \leq Q_r(f) \leq Q_r(P_{s_r}) \leq \int_a^b P_{s_r}(x) w(x) dx,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

Es sei eine Schar positiver mechanischer Quadraturverfahren interpolatorischer Art besonders hervorgehoben. Es sei $\{t_n(x)\}$ die Folge der Orthogonalpolynome, die zu einer Gewichtsfunktion $w_1(x)$ gehören, und es seien $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$ die Nullstellen von $t_n(x)$. Ferner seien $\{l_{kn}(x)\}$ die zu diesen Grundpunkten gehörigen Lagrangeschen interpolatorischen Grundparabeln, d. h. die Polynome höchstens $n-1$ -ten Grades, für die

$$l_{kn}(x_i) = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k) \end{cases}$$

besteht. Verfasser zeigte [6], daß die Beziehung

$$(44) \quad l_{kn}(x) = A_{kn} \sum_{r=0}^{n-1} t_r(x_{kn}) t_r(x)$$

besteht, wobei die A_{kn} die Cotesschen Zahlen der Gauß—Jacobischen mechanischen Quadratur mit der Gewichtsfunktion $w_1(x)$ bedeuten:

$$(45) \quad A_{kn} = \int_a^b l_{kn}^2(x) w_1(x) dx > 0.$$

Es sei nun $w(x) = q(x) w_1(x)$ und wir betrachten das Quadraturverfahren mit den Cotesschen Zahlen

$$(46) \quad \lambda_{kr} = \int_a^b l_{kr}(x) w(x) dx.$$

Dieses Verfahren ist interpolatorisch mit $s_r = r-1$. Infolge (44) ist

$$\lambda_{kr} = A_{kr} \sum_{r=0}^{r-1} t_r(x_{kr}) \int_a^b t_r(x) q(x) w_1(x) dx.$$

Die Summe an der rechten Seite ist nichts anderes, als die $r-1$ -te Partialsumme der Orthogonalentwicklung von $q(x)$ nach dem System $\{t_r(x)\}$ an der Stelle x_{kr} . Ist also $q(x) \geq m > 0$ und ist die Orthogonalentwicklung in $[a, b]$ gleichmäßig konvergent, so sind alle λ_{kr} wenigstens für genügend große r positiv. Also gilt der

Satz III. Es sei

$$w(x) = q(x) w_1(x), \quad q(x) \geq m > 0 \quad (a \leq x \leq b),$$

und die Orthogonalentwicklung von $q(x)$ nach dem zur Gewichtsfunktion $w_1(x)$ in (a, b) gehörigen orthonormierten Polynomsystem $\{t_r(x)\}$ sei in (a, b) gleichmäßig konvergent. Dann ist das mechanische Quadraturverfahren über die Nullstellen von $\{t_r(x)\}$ mit den Cotesschen Zahlen (46) interpolatorisch mit $s_r = r - 1$, und wenigstens für genügend große r positiv.

Besteht außerdem (42), so kann also der Fehler des Quadraturverfahrens für $r > R$ durch (43) abgeschätzt werden.

III. Bestimmung der bestmöglichen einseitigen Approximation in einigen Fällen.

Es sei

$$\varrho(x) = \varrho_0 \prod_{i=1}^{\mu} (x - \eta_i)$$

ein Polynom μ -ten Grades, dessen sämtliche Nullstellen η_i reell und kleiner als a sind. Wir nehmen an, daß $\varrho(x)$ im $[a, b]$ positiv ist. Es sei ferner $w(x) \in L$ eine in (a, b) definierte, nichtnegative Gewichtsfunktion, die zugehörigen Orthogonalpolynome seien $\{t_r(x)\}$. Wir wählen eine Zahl A , so daß sämtliche Nullstellen

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

von $\bar{t}_{n-1}(x) = t_n(x) + A t_{n-1}(x)$ in (a, b) fallen. (Für $A = 0$ ist das sicher erfüllt.) Wir konstruieren die Polynome $\bar{r}(x)$ und $\bar{R}(x)$ höchstens $2n + \mu - 2$ -ten Grades, für welche

$$\bar{r}(\eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

$$\begin{aligned} \bar{r}(\xi_1) = \bar{r}(\xi_2) = \dots = \bar{r}(\xi_k) = 0, \quad \bar{r}(\xi_{k+1}) = \dots = \bar{r}(\xi_n) = 1, \\ \bar{r}'(\xi_1) = \bar{r}'(\xi_2) = \dots = \bar{r}'(\xi_{k-1}) = 0, \quad \bar{r}'(\xi_{k+1}) = \dots = \bar{r}'(\xi_n) = 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$\bar{R}(\eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi_1) = \bar{R}(\xi_2) = \dots = \bar{R}(\xi_{k-1}) = 0, \quad \bar{R}(\xi_k) = \dots = \bar{R}(\xi_n) = 1, \\ \bar{R}'(\xi_1) = \bar{R}'(\xi_2) = \dots = \bar{R}'(\xi_{k-1}) = 0, \quad \bar{R}'(\xi_{k+1}) = \dots = \bar{R}'(\xi_n) = 1. \end{aligned}$$

Dann hat die Derivierte $\bar{r}'(x)$ $n - 1$ vorgeschriebene Nullstellen, ferner muß es nach dem Satze von ROLLE im Inneren der Intervalle

$$(\eta_1, \eta_2), \dots, (\eta_{\mu-1}, \eta_{\mu}), (\eta_{\mu}, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{k-1}, \xi_k), (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}), \dots, (\xi_{n-1}, \xi_n)$$

wenigstens einmal verschwinden; das sind insgesamt $2n + \mu - 3$ Nullstellen. Da der Grad von $\bar{r}'(x)$ diese Zahl nicht übersteigen kann, kann es weitere Nullstellen nicht geben. Hiermit ist der Verlauf der Kurve von $\bar{r}(x)$ bestimmt;

es ist

$$\bar{r}(x) \equiv g_0(x, \xi_k) = \begin{cases} 0 & (x \leq \xi_k), \\ 1 & (x > \xi_k), \end{cases}$$

und ähnlicherweise

$$\bar{R}(x) \equiv g_0(x, \xi_k).$$

Hieraus folgt, daß die Polynome höchstens $2n-2$ -ten Grades

$$r(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\varrho(x)}, \quad R(x) = \frac{\bar{R}(x)}{\varrho(x)}$$

die Ungleichung

$$(47) \quad r(x) \leq U(x, \xi_k) \leq R(x)$$

befriedigen, wo

$$(48) \quad U(x, \xi_k) = \begin{cases} 0 & (x \leq \xi_k), \\ \varrho^{-1}(x) & (x > \xi_k) \end{cases}$$

bedeutet. Nun gilt für jedes Polynom $II_{2n-2}(x)$ höchstens $2n-2$ -ten Grades

$$\int_a^b II_{2n-2}(x) w(x) dx = \sum_{r=1}^n \lambda_r II_{2n-2}(\xi_r),$$

wobei λ_k die Cotesschen Zahlen der verallgemeinerten Gauß—Jacobischen mechanischen Quadratur mit den Grundpunkten ξ_k bedeuten. (Bekanntlich sind sämtliche λ_k positiv; vgl. FEJÉR [2].) Ist $II_{2n-2}(x) \equiv U(x, \xi_k)$, dann erhält man hieraus infolge (47), (48) und der Positivität der Cotesschen Zahlen⁴⁾

$$\int_a^b II_{2n-2}(x) w(x) dx \equiv \sum_{r=k}^n \lambda_r \frac{1}{\varrho(\xi_r)}$$

und das Gleichheitszeichen findet statt, falls $II_{2n-2}(x) \equiv R(x)$ ist. Ähnlicherweise bekommen wir, daß für Polynome $II_{2n-2}^*(x)$ höchstens $2n-2$ -ten Grades, die die Ungleichung $II_{2n-2}^*(x) \leq U(x, \xi_k)$ befriedigen,

$$\int_a^b II_{2n-2}^*(x) w(x) dx \leq \sum_{r=k+1}^n \lambda_r \frac{1}{\varrho(\xi_r)}$$

ist, und hier gilt für $II_{2n-2}^*(x) \equiv r(x)$ ebenfalls das Gleichheitszeichen. Zusammenfassend, besteht der folgende Satz:

Satz IV. *Es sei $\{t_n(x)\}$ die Folge der Orthogonalpolynome, die zur Gewichtsfunktion $w(x)$ in (a, b) gehören. Die Nullstellen ξ_r von $t_n(x) + At_{n-1}(x)$ sollen sämtlich im Intervall (a, b) liegen. Dann bestehen für alle Polynome höchstens $2n-2$ -ten Grades*

$$II_{2n-2}(x) \equiv U(x, \xi_k)$$

⁴⁾ Man beachte, daß aus (48) und der Stetigkeit von $II_{2n-2}(x)$ folgt: $II_{2n-2}(\xi_k) \equiv \varrho^{-1}(\xi_k)$.

bzw.

$$\Pi_{2n-2}^*(x) \leq U(x, \xi_k)$$

die Ungleichungen

$$\int_a^b [\Pi_{2n-2}(x) - U(x, \xi_k)] w(x) dx \geq \sum_{r=k}^n \lambda_r \frac{1}{\varrho(\xi_r)} - \int_{\xi_k}^b \frac{w(x)}{\varrho(x)} dx,$$

bzw.

$$\int_a^b [U(x, \xi_k) - \Pi_{2n-2}^*(x)] w(x) dx \geq \int_a^{\xi_k} \frac{w(x)}{\varrho(x)} dx - \sum_{r=k+1}^n \lambda_r \frac{1}{\varrho(\xi_r)}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\Pi_{2n-2}(x) = R(x)$, bzw. $\Pi_{2n-2}^*(x) = r(x)$ ist.

Der genaue kleinste Wert der Approximation von beiden Seiten ist also

$$\int_a^b [\Pi_{2n-2}(x) - \Pi_{2n-2}^*(x)] w(x) dx \geq \frac{\lambda_k}{\varrho(\xi_k)}.$$

Wir geben noch ein Beispiel speziellerer Art, wo die bestmögliche einseitige Approximation von $|x|$ (allerdings nur von der einen Seite) bestimmbar ist.

Es sei $(a, b) = (-1, 1)$, $w(x) \in L(-1, 1)$ eine gerade, nichtnegative Funktion und es seien $t_n(x)$ ($n=0, 1, \dots$) die in $(-1, +1)$ zur Gewichtsfunktion $w(x)$ gehörigen Orthogonalpolynome. Die der Größe nach geordneten Nullstellen von $t_{2n+1}(x)$ seien

$$\zeta_{-n} < \zeta_{-n+1} < \dots < \zeta_{-1} < \zeta_0 = 0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_n.$$

Wir konstruieren das Polynom $\mathcal{P}(x)$ höchstens $4n-1$ -ten Grades mit

$$\mathcal{P}(\zeta_{-k}) = -1, \mathcal{P}(\zeta_k) = 1, \mathcal{P}'(\zeta_{-k}) = \mathcal{P}'(\zeta_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Aus Symmetriegründen wird $\mathcal{P}(0) = 0$.

Der Verlauf dieses Polynoms ist im Wesentlichen derselbe, wie derjenige von $\varphi_n(x)$ in Gleichung (19) des I. Teiles dieser Arbeit, d. h.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &\geq -1 \quad \text{für } x < 0, \\ \mathcal{P}(x) &\leq 1 \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Es gilt also im ganzen Intervall $(-1, +1)$:

$$(49) \quad x\mathcal{P}(x) \leq |x|.$$

Da der Grad von $x\mathcal{P}(x)$ gleich $4n$, also kleiner als $4n+1=2(2n+1)-1$ ist, folgt aus der Gauß—Jacobischen mechanischen Quadraturformel, daß

$$\int_{-1}^{+1} x\mathcal{P}(x) w(x) dx = \sum_{k=-n}^{+n} A_k |\xi_k|$$

ist, wobei die $A_k > 0$ die Cotes—Christoffelschen Zahlen der Gauß—Jacobi-schen mechanischen Quadraturformel mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ bedeuten, deren Grundpunkte ζ_k sind. Andererseits, ist $\Pi_{4n+1}(x)$ ein beliebiges Polynom höchstens $4n+1$ -ten Grades, welches die Ungleichung

$$(50) \quad \Pi_{4n+1}(x) \leq |x|$$

in $(-1, +1)$ befriedigt, dann ist infolge der Positivität der A_k

$$\int_{-1}^{+1} \Pi_{4n+1}(x) w(x) dx = \sum_{k=-n}^{+n} A_k \Pi_{4n+1}(\zeta_k) \leq \sum_{k=-n}^{+n} A_k |\zeta_k|.$$

Hieraus folgt der

Satz V. *Es seien $w(x) \in L$ eine gerade nichtnegative Funktion, $t_{2n+1}(x)$ das zur Gewichtsfunktion $w(x)$ in $(-1, +1)$ gehörige Orthogonalpolynom $2n+1$ -ten Grades; die Nullstellen von $t_{2n+1}(x)$ seien ζ_k ($k = -n, -n+1, \dots, n$). Ist $\Pi_{4n+1}(x)$ ein Polynom höchstens $4n+1$ -ten Grades, welches die Ungleichung (50) befriedigt, so besteht die Ungleichung*

$$\int_{-1}^{+1} [|x| - \Pi_{4n+1}(x)] w(x) dx \geq \int_{-1}^{+1} |x| w(x) dx - \sum_{k=-n}^{+n} A_k |\zeta_k|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn Π_{4n+1} gleich dem oben definierten Polynom $x \vartheta(x)$ ist.

IV. Restgliedabschätzung Tauberscher Sätze.

Dieser Teil der Arbeit ist einigen Verallgemeinerungen früherer Resultate des Verfassers (G. FREUD [3], [4], [5]) gewidmet. In den erwähnten Arbeiten wurden im Wesentlichen nur die Folgerungen von (32) behandelt, hier wollen wir eine Konsequenz des Satzes Ia betrachten. In den erwähnten Arbeiten beschäftigten wir uns mit speziellen Mittelbildungen; im folgenden wollen wir Taubersche Sätze untersuchen, die aus der Laplace—Stieltjes-Transformation auf die Asymptotik von Mittelbildungen allgemeiner Art schließt. Der Ausgangspunkt ist der folgende Satz von J. KARAMATA [9].

Es sei $\tau(t)$ eine in $(0, \infty)$ definierte, monoton nicht abnehmende Funktion, für welche das Laplace-Integral

$$(51) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\tau(t)$$

für $s > 0$ konvergiert, und es sei

$$F(s) \approx A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha}.$$

Dann besteht für jede in $[0, 1]$ im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$

$$\int_0^{\infty} f\left(e^{-\frac{t}{x}}\right) e^{-\frac{t}{x}} d\tau(t) \approx Ax^{\alpha} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} f(u) du.$$

Wir zeigen, daß für $f \in K_r$ dieser Satz mit einer Restgliedabschätzung ergänzt werden kann.

Satz VI. Es sei $f \in K_r$ und $\alpha \geq \frac{1}{2}$, ferner bestehe für das Laplace—Stieltjes-Integral (51) in der Nähe von $s = +0$ die Asymptotik

$$(52) \quad F(s) = A \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha}} [1 + O\{R(s)\}],$$

wobei $R(s)$ eine monoton wachsende Funktion mit $R(+0) = 0$ bedeutet, für welche für jedes positive s und eine passend gewählte positive Konstante c_1

$$(53) \quad R(ks) < e^{c_1 k} R(s) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

besteht. Dann gilt

$$(54) \quad \int_0^{\infty} f\left(e^{-\frac{t}{x}}\right) e^{-\frac{t}{x}} d\tau(t) = Ax^{\alpha} \left[\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} f(x) dx + O\left\{ \left(\log \frac{1}{R\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{-r-1} \right\} \right].$$

Beweis. Infolge des Satzes Ia gibt es Polynome $P_n(x)$ und $p_n(x)$ höchstens n -ten Grades mit

$$(55) \quad p_n(x) \leq f(x) \leq P_n(x)$$

und

$$(56) \quad \int_0^1 [P_n(x) - p_n(x)] \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \frac{c_2}{n^{r+1}}.$$

Hieraus folgt wegen $\alpha \geq \frac{1}{2}$

$$(57) \quad \int_0^1 [P_n(x) - p_n(x)] \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \leq \frac{c_3}{n^{r+1}}.$$

Aus (52), (53), (55) und (57) schließt man ebenso weiter, wie in den Arbeiten [3] und [4] des Verfassers; die weiteren Einzelheiten des Beweises kann man Schritt für Schritt aus [3] und [4] übernehmen.

Literaturverzeichnis.

- [1] P. ERDŐS—P. TURÁN, On interpolation. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), 510—553.
 [2] L. FEJÉR, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschrift*, **37** (1933), 287—309.
 [3] G. FREUD, Restglied eines Tauberschen Satzes. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **2** (1951), 299—308.
 [4] G. FREUD, Restglied eines Tauberschen Satzes. II, *ebenda*, **3** (1952), 299—307.
 [5] G. FREUD, Restglied eines Tauberschen Satzes. III, *ebenda*, im Erscheinen.
 [6] G. FREUD, Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation, *ebenda*, **4** (1953), 137—142.
 [7] А. А. МАРКОВ, О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей (Петроград, 1884).
 [8] J. KARAMATA, Über die Hardy—Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 519—520.
 [9] J. KARAMATA, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen, *Journal für die reine und angew. Math.*, **164** (1931), 27—29.
 [10] С. НИКОЛЬСКИЙ, О наилучшем приближении функции, s -ая производная которой имеет разрыв первого порядка, Доклады Акад. Наук СССР, **55** (1947), 99—102.
 [11] T. J. STIÉLTJES, Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques, *Annales de l'École Normale Sup.*, **1** (1884), 409—426.
 [12] G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials* (New York, 1939).
 [13] H. WEYL, Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen*, **77** (1916), 313—352.

(Eingegangen am 1. Oktober 1954.)

Berichtigung zur Arbeit „Über einen Zusammenhang zwischen den Funktionen- klassen $\text{Lip } \alpha$ und $\text{Lip}(\beta, p)$.“^{*)}

Von GÉZA FREUD in Budapest.

Der angeführte Satz wurde von G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD sogar mit der schärferen Aussage $g \in \text{Lip}\left(\beta - \frac{1}{p}\right)$ bewiesen: A convergence criterion for Fourier series, *Math. Zeitschrift*, **28** (1928), 612—634, insbesondere S. 627—628. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes befindet sich in der Arbeit von YA. L. GERONIMUS, Über Annäherungen im Mittel und gleichmäßige Annäherungen, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **88** (1953), 597—599 (Russisch).

^{*)} Diese *Acta*, **15** (1954), 260.