Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen, insbesondere deren Äquivalenz.

Von A. MOÓR und GY. SOÓS in Debrecen.

Einleitung.

Zu Grunde gelegt sei eine n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit P_n. Die Punktmannigfaltigkeit P_n werden wir nun dadurch zu einer Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen H_n erweitern, daß wir zu jedem Punkt x^i von P_n alle den Punkt x^i enthaltende orientierte Hyperflächenelemente u_i hinzunehmen. Das Grundelement (x^i, u_i) des Raumes H_n ist also das Hyperflächenelement u_i mit dem Zentrum x^i.

Bei einer Koordinatentransformation

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{0, 1}$$

die wir immer als umkehrbar und eindeutig voraussetzen, transformieren sich die u_i wie kovariante Vektordichten vom Gewicht -1. Es wird also bei der Koordinatentransformation (0, 1)

$$\bar{u}_i = \Delta^{-1} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} u_p, \tag{0, 2}$$

wo

$$\Delta = \operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} \right|, \quad \Delta^{-1} = \operatorname{Det} \left| \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \right| \tag{0, 3}$$

bedeutet.

Existiert in H_n eine metrische Grundfunktion

$$L = L(x, u),$$

die in den u_i positiv homogen von erster Dimension ist, und die das Oberflächenelement in der Form

$$dO = \frac{L(x, u)}{u_n} dx^1 \ldots dx^{n-1}$$

definiert, so ist H_n ein Cartanscher Raum. Die Geometrie der Cartanschen Räume hat L. BERWALD in einer fundamentalen Arbeit[1]) entwickelt. In einem

[1]) Vgl. [1], Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

Cartanschen Raum sind die Größen, die das invariante und das kovariante Differential der Vektoren und der Tensoren bestimmen, alle von der Grundfunktion $L(x, u)$ ableitbar.

Im folgenden wollen wir die Existenz einer metrischen Grundfunktion in unserem H_n nicht bedingen, wohl aber voraussetzen, daß ein invariantes Differential der Vektordichten existiert. Die Grundgrößen, die das invariante Differential der Vektordichten bestimmen, bilden also die Fundamentalgrößen des H_n.

H_n ist also eine „affine“ Erweiterung des Cartanschen Raumes. In diesem Raum treten neben den Tensoren auch Tensordichten auf, deswegen werden wir in § 1 und § 2 für Vektordichten das invariante und das kovariante Differential angeben. In § 3 werden wir die fundamentalen Krümmungs-, und Torsionsgrößen dieses Raumes bestimmen, endlich in § 4 untersuchen wir das Äquivalenzproblem der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten der Hyperflächenelemente. Das wird uns eine Möglichkeit geben, die charakterisierenden Invarianten des Raumes zu bestimmen.

Wir werden dieses Problem in analoger Weise behandeln, wie Herr O. Varga das entsprechende Problem der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen behandelt hat.[2])

§ 1. Invariantes Differential von Vektordichten.

In diesem § werden wir das invariante Differential von Vektordichten angeben. Die entsprechenden Formeln lassen sich dann leicht auch auf allgemeine Tensoren und Tensordichten erweitern. Sämtliche Größen von H_n sind erst in bezug auf ein Hyperflächenelement definiert; sie sollen in den u_i homogen von irgendwelcher ganzzahliger Dimension sein.

Die Formel des invarianten Differentials der Vektordichten ergibt auch das invariante Differential der Vektoren, wenn darin $p=0$ gesetzt wird. Vom invarianten Differential der Vektordichten fordern wir, daß es zu einer Vektordichte vom Gewicht p eine ebensolche Vektordichte zuordne, und die Gesetze des gewöhnlichen Differentials befriedige.

Das invariante Differential einer kontravarianten Vektordichte $\mathfrak{x}^i$ vom Gewicht p ist durch die Formel

$$(1,1)\qquad D\mathfrak{x}^i = d\mathfrak{x}^i + \Gamma_s{}^i{}_k \mathfrak{x}^s dx^k + \mathfrak{C}_s{}^{ik} \mathfrak{x}^s du_k - p\mathfrak{x}^i (\Gamma_t{}^t{}_k dx^k + \mathfrak{C}_t{}^{tk} du_k)$$

angegeben.[3]) Offensichtlich befriedigt die Operation „D“ die Gesetze des gewöhnlichen Differentials; somit müssen wir nur noch zeigen, daß $D\mathfrak{x}^i$ eine Tensordichte vom Gewicht p ist.

---

[2]) Vgl. [4], § 4.

[3]) Wir werden die Vektor- und Tensordichten, falls $p \neq 0$ besteht, mit gotischen Buchstaben bezeichnen; wir bezeichnen nur das Grundelement u_i mit lateinischem Buchstaben.

Dazu gehen wir jetzt über. Wir definieren die Transformationsformeln der $\Gamma^{\;i}_{s\,k}$, $\mathfrak{C}_s^{\;i}{}_k$ in bezug auf (0, 1) durch folgende Transformationsgleichungen:

$$\overline{\Gamma}^{\;i}_{s\,k} = \Gamma^{\;b}_{a\,c} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k} - \mathfrak{C}_a^{\;bc} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^c} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^k} u_t - \tag{1, 2}$$
$$- \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^a \partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}$$

und

$$\overline{\mathfrak{C}}_s^{\;ik} = \Delta \mathfrak{C}_a^{\;bc} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^c}. \tag{1, 3}$$

Da das invariante Differential (1, 1) einer Vektordichte sich nicht ändern kann, wenn man die u_i durch ϱu_i $(\varrho > 0)$ ersetzt, müssen die $\Gamma^{\;i}_{s\,k}$ in den u_i homogen von nullter, die $\mathfrak{C}_s^{\;ik}$ homogen von (—1)-ter Dimension und $\mathfrak{C}_s^{\;io} = 0$ sein.

Wir nehmen an, dass die $\mathfrak{C}_s^{\;ik}$ die Relationen

$$\mathfrak{C}_s^{\;ok} = u_s \mathfrak{C}_t^{\;tk} \tag{1, 4}$$

befriedigen, die in dem metrischen Fall, also im Cartanschen Raum immer erfüllt sind. Dabei bedeutet das „o" jetzt und im folgenden stets die Überschiebung mit u_i. Aus (1, 2) folgt

$$\overline{\Gamma}^{\;t}_{t\,k} = \Gamma^{\;a}_{a\,c} \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k} - \mathfrak{C}_a^{\;ac} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^c} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^k} u_t + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \overline{x}^k}; \tag{1, 5}$$

bei der Herleitung von dieser Transformationsformel haben wir noch die Relationen:

$$\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} = \delta^i_k, \qquad \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^t} \frac{\partial \overline{x}^t}{\partial x^l} = \delta^j_l \tag{1, 6}$$

benutzt, wo δ^i_k das Kroneckersche Symbol bedeutet.

Aus (1, 1)—(1, 6) folgt nun die Formel

$$D\overline{\mathfrak{x}}^i = \Delta^p \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^t} D\mathfrak{x}^t,$$

die ausdrückt, daß $D\mathfrak{x}^t$ eine Vektordichte vom Gewicht p ist, wie wir das gefordert haben.

Für eine kovariante Vektordichte lautet das invariante Differential:

$$D\mathfrak{x}_i = d\mathfrak{x}_i - \Gamma^{\;s}_{i\,k} \mathfrak{x}_s dx^k - \mathfrak{C}_i^{\;sk} \mathfrak{x}_s du_k - p\mathfrak{x}_i(\Gamma^{\;t}_{t\,k} dx^k + \mathfrak{C}_t^{\;tk} du_k). \tag{1, 7}$$

Wie es schon bemerkt wurde, erhält man das invariante Differential der Vektoren aus (1, 1) bzw. (1, 9), wenn man darin $p = 0$ setzt. Es wird z. B. für einen kontravarianten Vektor ξ^i:

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^{\;i}_{j\,k} \xi^j dx^k + \mathfrak{C}_j^{\;ik} \xi^j du^k. \tag{1, 8}$$

Wenn die $\Gamma^{\;i}_{j\,k}$ und $\mathfrak{C}_j^{\;ik}$ von einer metrischen Grundfunktion ableitbar sind, also H_n ein Cartanscher Raum ist, dann ergibt (1, 8) eben das invariante Differential des Vektors ξ^i im Cartanschen Raum.

Aus den Gleichungen (1, 1) und (1, 7) kann man das invariante Differential einer allgemeinen Tensordichte schon ableiten, was wir aber jetzt nicht durchführen werden; wir verweisen aber darauf, daß die $\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ und $\mathfrak{C}_j^{\ ik}$ enthaltenden Glieder bei kontravarianten Indexen stets positive, bei kovarianten Indexen dagegen stets negative Vorzeichen erhalten. Ähnlich für Vektoren. Wir geben die folgende

Definition: *Eine Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen heißt affinzusammenhängend, falls für sie Funktionen $\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ und $\mathfrak{C}_j^{\ ik}$ definiert sind, die den Transformationsgleichungen* (1, 2) *und* (1, 3) *und ferner die Relationen* (1, 4) *genügen.*

§ 2. Die kovariante Ableitung.

Die kovariante Ableitung spielt in der Tensorrechnung die Rolle der partiellen Ableitung. Angewandt auf einen Tensor läßt die kovariante Ableitung die kovariante Stufenzahl des Tensors um eins wachsen. In Bezug auf Tensordichten fordern wir von der kovarianten Ableitung:

1. sie soll die kovariante Stufenzahl einer Tensordichte vom Gewicht p und homogen in den u_i von ν-ter Dimension um eins erhöhen;

2. sie soll das Gewicht p und den Homogenitätsgrad ν unverändert lassen;

3. sie soll die gewöhnlichen Differentiationsregeln befriedigen;

4. für einen Vektor ξ^i, der in den u_i homogen von nullter Dimension ist, soll

$$\xi^i|_k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial u_s} \Gamma_{s\ k}^{*o} + \Gamma_{s\ k}^{*i} \xi^s \tag{2, 1}$$

sein, wo

$$\Gamma_{s\ k}^{*i} = \Gamma_{s\ k}^{\ i} + \mathfrak{C}_s^{\ ir} \Gamma_{r\ k}^{\ o} \tag{2, 2}$$

bedeutet. Aus den Formeln (1, 2)—(1, 4) folgt leicht, daß $\Gamma_{s\ k}^{*i}$ dieselbe Transformationsformel besitzt, wie der Übertragungsparameter eines affinzusammenhängenden Punktraumes P_n. Es ist also

$$\overline{\Gamma}_{s\ k}^{*i} = \Gamma_{a\ c}^{*b} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^s} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^b}{\partial \overline{x}^s \partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^b}. \tag{2, 3}$$

Nach (2, 3) folgt nach einer kurzen Rechnung sofort, daß (2, 1) einen Tensor zweiter Stufe bestimmt.

Definiert man die kovariante Ableitung für Skalardichten, dann kann man nach den Forderungen 1—4 die kovariante Ableitung der Tensordichten explizite angeben.

Für eine Skalardichte $\mathfrak{t}$, die in u_t homogen von ν-ter Dimension, und vom Gewicht p ist, ist die kovariante Ableitung durch:

$$\mathfrak{t}|_k = \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u_s} \Gamma_{s}{}^{*o}{}_{k} - (p+\nu)\mathfrak{t}\,\Gamma_s{}^{*s}{}_k \tag{2,4}$$

definiert. In der Definition der kovarianten Ableitung könnte man im letzten Glied statt $\nu\mathfrak{t}$ auch

$$\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u_i} u_i = \nu \mathfrak{t}$$

setzen. In dieser Weise definiert R. S. Clark die kovariante Ableitung in allgemeinen metrischen Räumen, deren Grundelement also eine Vektordichte vom Gewicht $-p$ ist.[4]) Die von ihm angegebene Definition stimmt im wesentlichen mit der unsrigen überein, wenn darin $p=1$ und $||^0 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ gesetzt wird.[5]) Im metrischen Fall steht aber statt u_i der Vektor l_i.

Wir beweisen jetzt, daß $\mathfrak{t}|_k$ die Forderungen 1—3 befriedigt, daß also auf $\mathfrak{t}|_k$ in bezug auf die Transformation (0, 1) die Transformationsformel:

$$\bar{\mathfrak{t}}|_k = \Delta^p \mathfrak{t}|_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \tag{2,5}$$

gültig ist (für Δ vgl. (0, 3)). Die Forderung 3 ist offensichtlich erfüllt. Beachtet man nun die Transformationsformel:

$$\bar{\mathfrak{t}}(\bar{x}, \bar{u}) = \Delta^p \mathfrak{t}(x, u) \tag{2,6}$$

von $\mathfrak{t}$, ferner die aus (0, 2), wegen der Gleichungen (1, 6) folgenden Relationen:

$$u_s = \Delta \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \bar{u}_r \tag{2,7}$$

und

$$\frac{\partial u_s}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^k} u_s + \Delta \frac{\partial^2 \bar{x}^m}{\partial x^s \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \bar{u}_m,$$

hierauf die aus (2, 6) und (2, 7) folgende Transformationsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{t}}}{\partial \bar{u}_k} = \Delta^{p+1} \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial u_s} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s}, \tag{2,8}$$

so bekommt man nach einfachen Rechnungen eben die Formel (2, 5), w. z. b. w.

Nebenbei bemerken wir, daß die Gleichung (2, 8) eine wichtige Tatsache ausdrückt: *die partielle Ableitung einer Tensordichte nach u_k erhöht um eins die kontravariante Stufenzahl und auch das Gewicht;* selbstverständlich vermindert sich dabei der Homogenitätsgrad in der u_i um eins.

[4]) Vgl. [2], Gleichung (1. 10).

[5]) $-p$ bedeutet bei Clark das Gewicht des Grundelementes; dies ist in unserem Fall -1.

Jetzt können wir die kovariante Ableitung einer Vektordichte bestimmen. Wir nehmen an, daß die Vektordichte $\mathfrak{T}^i$ in der Form:

$$\mathfrak{T}^i = \mathfrak{t}\xi^i \tag{2, 9}$$

angegeben ist, wo $\mathfrak{t}$ eine Skalarendichte vom Gewicht p und homogen ν-ter Dimension in den u_t ist, ξ^i aber einen Vektor homogen von nullter Dimension in den u_i darstellt. Es wird nach der Forderung 3 und (2, 9):

$$\mathfrak{T}^i|_k = \mathfrak{t}|_k \xi^i + \mathfrak{t}\xi^i|_k,$$

und nach den Gleichungen (2, 1) und (2, 4) wird:

$$\mathfrak{T}^i|_k = \frac{\partial \mathfrak{T}^i}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{T}^i}{\partial u_s} \Gamma_s{}^{*o}{}_k + \Gamma_s{}^{*i}{}_k \mathfrak{T}^s - (p+\nu)\mathfrak{T}^i \Gamma_s{}^{*s}{}_k. \tag{2, 10}$$

Wie man sich aus den entsprechenden Transformationsformeln leicht überzeugen kann, befriedigt (2, 10) die Forderungen 1—4 auch dann wenn $\mathfrak{T}^i$ nicht in der Form (2, 9) darstellbar ist.

In ähnlicher Weise kann man für eine kovariante Vektordichte die Formel:

$$\mathfrak{T}_i|_k = \frac{\partial \mathfrak{T}_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{T}_i}{\partial u_s} \Gamma_s{}^{*o}{}_k - \Gamma_i{}^{*s}{}_k \mathfrak{T}_s - (p+\nu)\mathfrak{T}_i \Gamma_s{}^{*z}{}_k \tag{2, 11}$$

erhalten[6]). Nach (2, 11) bekommt man

$$u_i|_k = 0,$$

da u_i eine Vektordichte vom Gewicht —1 ist; es ist also $p = -1$, $\nu = 1$.

Mit Hilfe der Relationen (2, 10) und (2, 11) kann man schon auf Grund der Forderung 3 leicht das kovariante Differential für allgemeine Tensordichten ableiten. Es ist z. B.:

$$\mathfrak{T}^i{}_j|_k = \frac{\partial \mathfrak{T}^i{}_j}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathfrak{T}^i{}_j}{\partial u_s} \Gamma_s{}^{*o}{}_k + \Gamma_s{}^{*i}{}_k \mathfrak{T}^s{}_j - \Gamma_j{}^{*s}{}_k \mathfrak{T}^i{}_s - (p+\nu)\mathfrak{T}^i{}_j \Gamma_s{}^{*s}{}_k. \tag{2, 12}$$

§ 3. Charakterisierende Tensordichten des Raumes.

Zuerst werden wir in diesem Paragraphen die Formel des invarianten Differentials der Vektordichten, also (1, 1) bzw. (1, 7) umformen, dann wie gewöhnlich[7]), mit Hilfe von vertauschbaren Differentiationssymbolen die Torsions- und Krümmungsgrößen des Raumes ableiten, und zuletzt die Parallelübertragung von Vektordichten untersuchen.

Das invariante Differential von u_k ist nach (1, 7) wegen $p = -1$

$$\omega_k(d) \equiv Du_k = du_k - \Gamma_k{}^o{}_r dx^r + u_k \Gamma_t{}^t{}_r dx^r,$$

die man nach (2, 2) und (1, 4) auch in der Form:

$$\omega_k(d) = du_k - \Gamma_k{}^{*o}{}_r dx^r + u_k \Gamma_t{}^{*t}{}_r dx^r \tag{3, 1}$$

---

[6]) p bedeutet in (2, 11), wie vorher, das Gewicht, ν den Homogenitätsgrad in den u_t.

[7]) Vgl. [4], § 3, oder [1].

schreiben kann. Mit Hilfe der konvarianten Ableitung können wir dann (1, 1) und (1, 7) in der Form:

(3, 2a) $$D\mathfrak{x}^i = \mathfrak{x}^i|_m dx^m + \mathfrak{x}^{i;k}\omega_k(d)$$

(3, 2b) $$D\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_i|_m dx^m + \mathfrak{x}_i{}^{;k}\omega_k(d)$$

schreiben, wo

(3, 3a) $$\mathfrak{x}^{i;k} = \frac{\partial \mathfrak{x}^i}{\partial u_k} + \mathfrak{C}_r{}^{ik}\mathfrak{x}^r - p\,\mathfrak{x}^i\mathfrak{C}_t{}^{tk}$$

(3, 3b) $$\mathfrak{x}_i{}^{;k} = \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial u_k} - \mathfrak{C}_i{}^{rk}\mathfrak{x}_r - p\,\mathfrak{x}_i\mathfrak{C}_t{}^{tk}$$

bedeutet. Offenbar sind (3, 3a) und (3, 3b) Tensordichten vom Gewicht $p+1$. Eine kleine Rechnung zeigt, daß das invariante Differential noch in der Form

(3, 4a) $$D\mathfrak{x}^i = d\mathfrak{x}^i + \mathfrak{x}^s\omega_s^i(d) - p\,\mathfrak{x}^i\omega_r^r(d)$$

bzw.

(3, 4b) $$D\mathfrak{x}_i = d\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_t\omega_i^t(d) - p\,\mathfrak{x}_i\omega_r^r(d)$$

angegeben werden kann, wo

(3, 5) $$\omega_i^t(d) = \Gamma^{*t}_{i\;k}dx^k + \mathfrak{C}_i{}^{tk}\omega_k(d)$$

bedeutet.

Sind d und δ miteinander vertauschbare Differentiationssymbole und D bzw. Δ die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale, so ist durch

$$\Delta dx^i - D\delta x^i$$

in jedem Grundelement des Raumes ein kontravarianter Vektor definiert, da dx^i im wesentlichen einen kontravarianten Vektor darstellt. Es wird:

$$\Delta dx^i - D\delta x^i = \Omega_j{}^i{}_k[dx^j dx^k] + \mathfrak{C}_j{}^{ik}[dx^j\omega_k(d)],$$

wo die eckigen Klammern die entsprechenden alternierenden Differentialformen bezeichnen[8]), und

(3, 6) $$\Omega_j{}^i{}_k = \frac{1}{2}(\Gamma^{*i}_{j\;k} - \Gamma^{*i}_{k\;j})$$

ist. Die Transformationsformel (2, 3) zeigt sofort, daß die $\Omega_j{}^i{}_k$ einen schiefsymmetrischen Tensor bestimmen. $\mathfrak{C}_j{}^{ik}$ ist nach (1, 3) eine Tensordichte vom Gewicht $+1$. Die Größen $\Omega_i{}^j{}_k$ und $\mathfrak{C}_i{}^{jk}$ charakterisieren somit die Torsion des Raumes. Verschwindet der Tensor $\Omega_i{}^j{}_k$, so ist der Zusammenhang symmetrisch. Im metrischen Fall ist immer

$$\Omega_j{}^i{}_k = 0.$$

Wir bestimmen jetzt die Krümmungsgrößen des Raumes. Dazu berechnen wir die Formel

$$(\Delta D - D\Delta)\mathfrak{x}_i,$$

[8]) Vgl. [1].

wo Δ und D zwei invariante Differentiationssymbole und $\mathfrak{x}_i$ eine kovariante Vektordichte bedeutet. Aus der Formel (3, 4b) erhält man nach einer längeren Rechnung

$$(3,7)\qquad (\Delta D - D\Delta)\mathfrak{x}_i = -\Omega_i^s \mathfrak{x}_s + p\mathfrak{x}_i \omega_r^{r\prime},$$

wo $\omega_r^{r\prime}$ die äußere Ableitung von ω_r^r bedeutet, und

$$(3,8)\qquad \Omega_i^s = [\omega_i^t \omega_t^s] - \omega_i^{s\prime}$$

ist; die Berechnung von (3, 8) ergibt

$$(3,9)\qquad \Omega_i^s = \frac{1}{2} R_{i\,mk}^{\,s}[dx^m dx^k] + \mathfrak{P}_{i\,k}^{\,s\,m}[dx^k \omega_m] + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_i^{smk}[\omega_m \omega_k],$$

wo

$$(3,10)\qquad R_{i\,mk}^{\,s} = \bar{R}_{i\,mk}^{\,s} - \mathfrak{C}_i^{st}\,\bar{\mathfrak{R}}_{t\,mk}^{\,o}\,{}^{9)}$$

mit

$$(3,10^*)\qquad \begin{aligned}\bar{R}_{i\,mk}^{\,s} = {} & \frac{\partial \Gamma_{i\ m}^{*s}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{i\ k}^{*s}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma_{i\ m}^{*s}}{\partial u_r}\Gamma_{r\ k}^{*o} - \\ & - \frac{\partial \Gamma_{i\ k}^{*s}}{\partial u_r}\Gamma_{r\ m}^{*o} + \Gamma_{i\ m}^{*r}\Gamma_{r\ k}^{*s} - \Gamma_{i\ k}^{*r}\Gamma_{r\ m}^{*s},\end{aligned}$$

$$(3,11)\qquad \mathfrak{P}_{i\,k}^{\,s\,m} = \frac{\partial \Gamma_{i\ k}^{*s}}{\partial u_m} - \mathfrak{C}_i^{sl} u_t \frac{\partial \Gamma_{l\ k}^{*t}}{\partial u_m} - \mathfrak{C}_i^{sm}|_k,$$

$$(3,12)\qquad \mathfrak{S}_i^{smk} = \frac{\partial \mathfrak{C}_i^{sm}}{\partial u_k} - \frac{\partial \mathfrak{C}_i^{sk}}{\partial u_m} + \mathfrak{C}_t^{sm}\mathfrak{C}_i^{tk} - \mathfrak{C}_t^{sk}\mathfrak{C}_i^{tm}$$

ist.

$R_{i\,mk}^{\,s}$ ist ein Tensor homogen von nullter Dimension in den u_i; $\mathfrak{P}_{i\,k}^{\,s\,m}$ ist eine Tensordichte vom Gewicht $+1$ und homogen von (-1)-ter Dimension in den u_i; $\mathfrak{S}_i^{smk}$ ist endlich eine Tensordichte vom Gewicht $+2$ und homogen von (-2)-ter Dimension in den u_i.

In einem Cartanschen Raum hat der dritte Krümmungstensor die Form

$$S_i^{smk} = A_t^{sm} A_i^{tk} - A_t^{sk} A_i^{tm}, \quad A_i^{sm} = \frac{L}{\sqrt{g}}\mathfrak{C}_i^{sm}.$$

Nach Überschiebung mit l_s wird

$$S_i^{omk} = 0$$

bestehen. Überschieben wir (3, 12) mit u_s, so wird nach (1.4)

$$\mathfrak{S}_i^{omk} = \delta_i^k \mathfrak{C}_s^{sm} - \delta_i^m \mathfrak{C}_s^{sk} + u_i\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_s^{sm}}{\partial u_k} - \frac{\partial \mathfrak{C}_s^{sk}}{\partial u_m}\right) + \mathfrak{C}_i^{mk} - \mathfrak{C}_i^{km}.$$

Ist

$$\mathfrak{S}_i^{omk} = 0,$$

---

9) $\bar{\mathfrak{R}}_{t\,mk}^{\,o} = \bar{R}_{t\,mk}^{\,i} u_i$; wir haben $\bar{\mathfrak{R}}_{t\,mk}^{\,o}$ geschrieben, weil die Überschiebung mit u_i eine Tensordichte ergibt.

so folgt, wenn wir $i=m$ setzen und auf m summieren wegen (1, 4) und wegen der Homogenität (—1)-ter Dimension der $\mathfrak{C}_s^{sm}$ in der u_i:

$$(2-n)\mathfrak{C}_s^{sk}=\mathfrak{C}_m^{km};$$

das ist im Cartanschen Raum immer erfüllt[10]). Bei Beachtung von (3, 6) können wir den folgenden Satz aussprechen:

S a t z 1. *Die Verallgemeinerung des Cartanschen Raumes bildet derjenige Raum H_n, in dem die Relationen*

$$\Omega_j{}^i{}_k=0, \quad \mathfrak{S}_i^{okm}=0$$

erfüllt sind.

Nach der Gleichung (3, 8) wird das Glied $\omega_r^{r\prime}$ in (3, 7) durch die Formel

$$\omega_r^{r\prime}=-\Omega_r{}^r$$

bestimmt sein. Statt der Gleichung (3, 7) bekommt man somit

$$(3, 13) \qquad (\varDelta D-D\varDelta)\mathfrak{x}_i=-(\Omega_i{}^s+p\delta_i^s\Omega_r{}^r)\mathfrak{x}_s.$$

Den Krümmungstensor (3, 10*), der im folgenden noch eine wichtige Rolle spielen wird, kann man auch mit Hilfe der Vektordichten und der kovarianten Ableitung bestimmen. Aus den Gleichungen (2, 11) und (2, 12) bekommt man

$$(3, 14) \qquad \mathfrak{x}_i|_k|_l-\mathfrak{x}_i|_l|_k=-\overline{R}_i{}^j{}_{kl}\mathfrak{x}_j+\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial u_j}\overline{\mathfrak{R}}_j{}^o{}_{kl}-2\Omega_k{}^s{}_l\mathfrak{x}_i|_s,$$

wo $\Omega_k{}^s{}_l$ durch (3, 6) bestimmt ist.

Jetzt werden wir die Parallelübertragung der Hyperflächenelemente und der Vektordichten in unserem H_n untersuchen. Die Parallelübertragung definieren wir immer durch das Verschwinden des invarianten Differentials. Dementsprechend ist die Parallelübertragung der Hyperflächenelemente nach (3, 1) durch die Differentialgleichung

$$(3, 15) \qquad \omega_k(d)=0$$

festgelegt. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen kann man aus

$$\delta\omega_k(d)-d\omega_k(\delta)=0$$

bestimmen. Nach (3, 15) ist das gleichbedeutend mit

$$\varDelta\omega_k(d)-D\omega_k(\delta)=0.$$

In Hinsicht auf (3, 15) erhalten wir als Integrabilitätsbedingungen die Gleichung

$$(3, 16) \qquad \overline{\mathfrak{R}}_i{}^o{}_{mk}-u_i\overline{R}_t{}^t{}_{mk}=0.$$

Diese Gleichung beweist den

---

[10]) Vgl. [1], Gl. (5, 12). Im metrischen Fall steht aber statt der Tensordichte $\mathfrak{C}_i^{jk}$ immer der Tensor A_i^{jk}.

S a t z 2. *Ein absoluter (vom Wege unabhängiger) Parallelismus der Hyperflächenelemente existiert in denjenigen affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen, wo die Gleichungen* (3, 16) *bestehen.*

Die Parallelübertragung der Vektordichten definieren wir durch die Gleichung

$$D\mathfrak{x}_i = 0. \tag{3, 17}$$

Wenn noch das Hyperflächenelement parallel mitgeführt wird, so muß außer der Gleichung (3, 17) auch (3, 16) erfüllt sein. Die Integrabilitätsbedingungen von (3, 17) lassen sich durch

$$(\varDelta D - D\varDelta)\mathfrak{x}_i = 0$$

angeben. Nach (3, 9), (3, 13) und (3, 15) kann man den folgenden Satz aussprechen:

S a t z 3. *Existiert in H_n ein absoluter Parallelismus der Vektordichten, so muß*

$$R_j{}^i{}_{kl} + p\delta^i_j R_m{}^m{}_{kl} = 0$$

erfüllt sein. Wegen der Willkürlichkeit des Gewichtes p ist

$$R_j{}^i{}_{kl} = 0.$$

§. 4. Die Äquivalenztheorie.

Es sein zwei verschiedene affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen $\hat{H}_n$ und H_n angegeben. Die beiden Mannigfaltigkeiten $\hat{H}_n$ und H_n sind äquivalent, wenn es eine Transformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad \bar{u}_i = \varDelta^{-1} \bar{S}^j_i u_j, \tag{4, 1a}$$

$$\bar{S}^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \quad \varDelta^{-1} = \mathrm{Det}\left|\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\right| \tag{4, 1b}$$

existiert, durch die die Größen $\hat{\mathfrak{C}}_m{}^{ij}$, $\hat{\Gamma}^{*i}_{m\,j}$ von $\hat{H}_n$ gemäß den Transformationsformeln (1, 3) und (2, 3) in $\mathfrak{C}_m{}^{ij}$, $\Gamma^*_m{}^i{}_j$ von H_n transformiert werden. Nebst $\bar{S}^j_i$ führen wir auch das zu $\bar{S}^j_i$ inverse System S^k_i durch die Gleichungen

$$\bar{S}^j_i S^i_k = \delta^j_k \tag{4, 2}$$

ein. Wegen (4, 1b) wird dann

$$S^i_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$$

sein; von der Transformation (4,1a) nehmen wir nämlich immer an, daß sie umkehrbar eindeutig ist.

Die Äquivalenzbedingungen stellen wir nun in folgender Form zusammen. Wegen (1, 6) wird

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^b} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p} = - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^p}.$$

Mit Hilfe dieser Identität können wir die Gleichung (2, 3) umformen; es wird:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^p} = \Gamma^{*\,t}_{r\;p} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^t} - \hat{\Gamma}^{*\,i}_{j\;k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p}.$$

Die Äquivalenzbedingungen sind:

$$\text{(4, 3)} \qquad \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} = S^p_i, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} = \bar{S}^p_i$$

$$\text{(4, 4)} \qquad \hat{\mathfrak{S}}_j^{\;ik}\, S^j_l = \Delta \mathfrak{S}_l^{\;mt}\, S^i_m\, S^k_t,$$

$$\text{(4, 5)} \qquad \frac{\partial S^l_j}{\partial x^k} = \Gamma^{*\,i}_{j\;k}\, S^l_i - \hat{\Gamma}^{*\,l}_{m\;t}\, S^m_j\, S^t_k.$$

Die Gleichungen (4, 4) und (4, 5) sind also im wesentlichen äquivalent mit (1, 3) und (2, 3). Zu diesen Gleichungen kommen noch die folgenden:

$$\text{(4, 6)} \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial u_k} = 0,$$

$$\text{(4, 7)} \qquad \frac{\partial S^p_i}{\partial u_m} = 0,$$

$$\text{(4, 8)} \qquad S^p_i \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_k} = \delta^k_i\, \Delta^{-1},$$

oder nach (4, 2)

$$\text{(4, 8*)} \qquad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial u_k} = \Delta^{-1}\, \bar{S}^k_r,$$

$$\text{(4, 9)} \qquad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x^l} \bar{S}^p_i u_p + \Delta^{-1} \frac{\partial \bar{S}^p_i}{\partial \bar{x}^r} u_p S^r_l.$$

Die Gleichungen (4, 8) und (4, 8*) sind wegen (4, 2) äquivalent. Sie folgen unmittelbar aus (0, 2). Auch die Gleichung (4, 9) folgt aus (0, 2) nach partieller Ableitung nach x^l. Wir müssen also die Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystems (4, 3)—(4, 9) bestimmen. Dies wollen wir mit Hilfe eines für Punktmanningfaltigkeiten zu gleichen Zwecken verwendeten Satzes von O. VEBLEN und J. M. THOMAS[11]) über ein gemischtes Differentialgleichungssystem durchführen. Die bestimmenden Funktionen sind $\bar{x}^i$, $\bar{u}_i$ und S^i_j, die Veränderlichen x^i, u_r. Unter den Differentialgleichungen unseres Systems ist (4, 4) eine skalare Relation, zu der wir aber sofort noch eine hinzufügen

---

[11]) Vgl. [3].

können, denn wegen (4, 3) bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial S_j^l}{\partial x^k} - \frac{\partial S_k^l}{\partial x^j} = 0,$$

die nach (4, 5) und (3, 6) mit

$$\Omega_j{}^i{}_k S_i^l - \hat{\Omega}_m{}^l{}_t S_j^m S_k^t = 0 \tag{4, 10}$$

gleichbedeutend sind.

Das Veblen—Thomassche Verfahren ist nun das folgende: wir müssen die skalaren Relationen nach u_s, x^i ableiten, bei den anderen Gleichungen der ersten Gleichungskette (4, 3)—(4, 10) die Integrabilitätsbedingungen bilden. Somit erhalten wir eine neue Gleichungskette, von der man durch ein entsprechendes Verfahren wieder eine neue Gleichungskette gewinnt, u. s. w. *Existiert nun eine Zahl N von der Art, daß die aus den N ersten Gleichungsketten bestehenden Gleichungen verträglich sind und jede ihrer Lösungen die* $(N+1)$*-te Gleichungskette identisch befriedigt, dann ist das gemischte Differentialgleichungssystem lösbar.*

Differenziert man (4, 4) und (4,10) nach u_r, so wird wegen (4, 8*)

$$\frac{\partial \hat{\mathfrak{G}}_j{}^{ik}}{\partial \bar{u}_p} \bar{S}_p^r S_l^j = \Delta^2 \frac{\partial \mathfrak{G}_l{}^{mt}}{\partial u_r} S_m^i S_t^k,$$

oder nach Überschiebung mit S_r^q

$$\frac{\partial \hat{\mathfrak{G}}_j{}^{ik}}{\partial \bar{u}_q} S_l^j = \Delta^2 \frac{\partial \mathfrak{G}_l{}^{mt}}{\partial u_r} S_m^i S_t^k S_r^q, \tag{4, 11}$$

und in ähnlicher Weise:

$$\Delta \frac{\partial \Omega_j{}^i{}_k}{\partial u_r} S_i^l S_r^q - \frac{\partial \hat{\Omega}_m{}^l{}_t}{\partial \bar{u}_q} S_j^m S_k^t = 0. \tag{4, 12}$$

Die Ableitung von (4, 4) und (4, 10) nach x^t ergibt wegen der Homogenität in den u_i und nach

$$\frac{\partial \bar{S}_r^p}{\partial \bar{x}^m} = -\frac{\partial S_j^l}{\partial x^k} \bar{S}_m^k \bar{S}_l^p \bar{S}_r^j = \hat{\Gamma}^{*l}_{r\ m} \bar{S}_l^p - \Gamma^*_j{}^p{}_k \bar{S}_m^k \bar{S}_r^j, \tag{4, 13}$$

$$\bar{S}_l^p u_p = \Delta \bar{u}_l, \tag{4,14}$$

die Relationen (vgl. §. 2)

$$\hat{\mathfrak{G}}_j{}^{ik}|_r S_t^r S_l^j = \Delta \mathfrak{G}_l{}^{mr}|_t S_m^i S_r^k, \tag{4, 15}$$

$$\hat{\Omega}_m{}^l{}_r|_s S_t^s S_j^m S_k^r = \Omega_j{}^i{}_k|_t S_i^l. \tag{4, 16}$$

(Die Gleichung (4, 12) folgt aus (4, 2), und (4, 14) aus (4, 1a)).

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 5) sind

$$\frac{\partial^2 S_j^l}{\partial x^k \partial u_r} - \frac{\partial^2 S_j^l}{\partial u_r \partial x^k} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 S^l_j}{\partial x^k \partial x^r} = \frac{\partial^2 S^l_j}{\partial x^r \partial x^k}.$$

Die erste ergibt nach (4, 8*)

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}^{*l}_{m\,t}}{\partial \bar{u}_p} S^m_j S^t_k = \varDelta \frac{\partial \Gamma^{*i}_{j\,k}}{\partial u_r} S^l_i S^p_r, \tag{4, 17}$$

die zweite

$$\hat{\overline{R}}_{m\,\,tp}^{\,\,l} S^m_j S^t_k S^p_r = \overline{R}_{j\,\,kr}^{\,\,i} S^l_i. \tag{4, 18}$$

Bei der Herleitung der Formel (4, 18) haben wir außer den bisherigen Gleichungen statt (4, 9)

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x^l} = -\frac{\partial \log \varDelta}{\partial x^l} \bar{u}^r + \hat{\Gamma}^{*o}_{r\,\,t} S^t_l - \varDelta^{-1} \Gamma^{*o}_{s\,\,l} \overline{S}^s_r$$

benutzt, die aus (4, 1b), (4, 9) und (4, 13) unmittelbar folgt.

Die Gleichungen (4, 6)—(4, 9) geben keine neuen Integrabilitätsbedingungen, da diese entweder trivialerweise erfüllt werden, oder aus (4,18) folgen. Z. B. die Integrabilitätsbedingungen von (4, 9) ergeben die Relation

$$\hat{\overline{\mathfrak{R}}}_{a\,\,bc}^{\,\,o} S^a_m S^b_k S^c_l = \varDelta^{-1} \overline{\mathfrak{R}}_{m\,\,kl}^{\,\,o}.$$

Die erste Gleichungskette ist von den Gleichungen (4, 3)—(4, 10) gebildet worden. Die Gleichungen (4, 11), (4, 12), (4, 15)—(4, 18) bilden die zweite Gleichungskette. Wir müssen diese wieder nach u_r und x^i partiell differenzieren. Wir können dann leicht verifizieren, daß die partielle Ableitung unserer Gleichungen nach u_r immer solche Tensordichten ergibt, bei denen immer

$$p + \nu = 0 \tag{4, 19}$$

besteht, wenn p das Gewicht, ν den Homogenitätsgrad in den u_i bedeutet. Nach der Ableitung nach x^r erhält man immer die kovarianten Ableitungen der entsprechenden Tensoren. Wegen der Relation (4,19) wird die kovariante Ableitung der Tensordichten nach (2, 7) ebensolche Form haben, wie die kovariante Ableitung eines Tensors.

Wir sind jetzt imstande die folgenden zwei Sätze zu formulieren:

Satz 4. *Zwei affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen sind dann und nur dann äquivalent, wenn es eine Zahl N von der Art gibt, daß die N ersten aus* (4, 11), (4, 12), (4, 15)—(4, 18) *durch kovariante Ableitung bzw. gewöhnliche Ableitung nach u_r folgenden Gleichungsketten ein verträgliches Gleichungssystem für die $\bar{x}_i$, $\bar{u}_r$, S^l_j als Funktion der x^a, u_t bilden und daß jede Lösung dieses Systems die $(N+1)$-te Gleichungskette identisch befriedigt.*

Die genannten Gleichungen ergeben noch den

Satz 5. *Der Krümmungstensor* $\bar{R}_j{}^i{}_{km}$, *die Torsionsdichte* $\mathfrak{C}_j{}^{ik}$, *der Torsionstensor* $\Omega_k{}^i{}_m$, *die Tensordichte* $\dfrac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}_k{}^i{}_j}{\partial u_m}$ *und die daraus durch eine endliche Anzahl gewöhnlicher Ableitungen nach den* u_i *bzw. kovariante Ableitungen nach den* x^i *hervorgehenden Tensoren und Tensordichten bilden ein vollständiges Invariantensystem.*

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.*, **71** (1939), 191—298.

[2] R. S. Clark, The conformal geometry of a general metric space, *Proceedings London Math. Soc.*, (2) **53** (1951), 294—309.

[3] J. M. Thomas—O. Veblen, Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.*, **27** (1926), 279—296.

[4] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), 7—17.

(*Eingegangen am 28. Juli 1954.*)