Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Alle Gruppen in dieser Arbeit, wenn nicht anderes gesagt wird, sollen endlich sein. Mit $o(G)$ bezeichnen wir die Ordnung einer solchen Gruppe G. Stets werde $G = AB$ angenommen, wobei A, B Untergruppen von G sind. Diese Gruppen G nennen wir faktorisierbar.

Bisher sind mehrere Arbeiten erschienen, welche die Nichteinfachheit der faktorisierbaren Gruppen untersuchen [1]—[7]. Wir schließen uns in dieser Arbeit teils diesen Untersuchungen an, teils untersuchen wir gewisse faktorisierbare Gruppen mit Zentrum.

Das im unten folgenden Satz 1 gelöste Problem hat uns freundlichst Herr N. Itô aufgeworfen.

Die Elemente einer vorgelegten Gruppe $G = AB (= BA)$ können wir als $a_i b_k$ und $b_l a_s$ $(a_i, a_s \in A; b_k, b_l \in B)$ darstellen. Ist $A \cap B = 1$, so durchläuft das Element a'_i in $a_i b = b_i a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ zusammen mit a_i bei festem b $(b \in B)$ alle Elemente von A. Man bezeichne im allgemeinen Fall mit $[b]$ das durch b eindeutig bestimmte System der b_i in $a_i b = b_i a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; dabei zählen wir die Elemente b_i mit Multiplizität.

Dem Satz 1 schicken wir zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. *Ist $\bar{b} \in [b]$, so ist $[\bar{b}] = [b]$.*

Beweis. Wegen $\bar{b} \in [b]$ gilt eine Gleichung $ab = \bar{b}a'$ $(a, a' \in A; b, \bar{b} \in B)$. Setzen wir das Element $b = a^{-1}\bar{b}a'$ in die Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein, so bekommen wir die Gleichungen $a_i a^{-1} \bar{b} = b_i a'_i a'^{-1}$, aus welchen die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. *$[b]$ enthält seine Elemente mit gleicher Multiplizität.*

Beweis. Es ist evident, daß $b \in [b]$ gilt. Wir fassen die Gleichungen $\bar{a}_i b = b \bar{a}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ unter allen Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ins Auge. Gilt $b_i = b$ für alle i, so ist die Behauptung trivial. Es sei dann $a_k b = b_k a'_k$ eine Gleichung, wo $b_k \neq b$ gilt. Schreiben wir das Element $b = a_k^{-1} b_k a'_k$ in die rechte Seite jeder Gleichung $\bar{a}_i b = b \bar{a}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein so bekommen wir die Gleichungen $a_k\bar{a}_i b = b_k a'_k \bar{a}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Es folgt aus diesen Gleichungen, daß die Multiplizität von b_k in $[b]$ nicht kleiner ist, als die von b. Andererseits wählen wir die Gleichungen $\bar{\bar{a}}_i b = b_k \bar{\bar{a}}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ von den Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ aus. Schreiben wir das Element $b_k = a_k b a_k'^{-1}$ in die Gleichungen $\bar{\bar{a}}_i b = b_k \bar{\bar{a}}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ein, so entstehen die Gleichungen $a_k^{-1}\bar{\bar{a}}_i b = b a_k'^{-1}\bar{\bar{a}}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; also ist die Multiplizität von b in $[b]$ nicht kleiner, als die von b_k. Somit haben wir Hilfssatz 2 bewiesen.

Wir werden noch den folgenden bekannten Satz A benützen (s. [1] oder [2]).

Satz A. *$G = AB$ ist nichteinfach, wenn $A \cap B$ einen Normalteiler $\neq 1$ von A oder B enthält.*

Satz 1. *$G = AB$ ist nichteinfach, wenn A abelsch ist, B ein Zentrum $(\neq 1)$ hat und $o(A) \geqq o(B)$ gilt.*

Beweis. Ist $A \cap B \neq 1$, so ist $A \cap B$ ein Normalteiler von A, also ist G nach Satz A nichteinfach. Im übriggebliebenen Fall $A \cap B = 1$ sei $b(\neq 1)$ ein Element des Zentrums von B. In den Gleichungen $a_i b = b_i a'_i$ $(a_i, a'_i \in A;\ b, b_i \in B;\ i = 1, \ldots, n;\ n = o(A))$ sind wegen $o(A) \geqq o(B)$ nicht alle b_i verschieden, folglich ist nach Hilfssatz 2 die Multiplizität von b in $[b]$ mindestens zwei. Die Gruppe A hat also zwei Untergruppen $\bar{A}, \bar{A}'(\neq 1)$, für welche $b^{-1}\bar{A}b = \bar{A}'$ gilt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1. $[b]$ erzeugt nicht die Gruppe B. In diesem Fall ergibt sich (mit Verwendung des Hilfssatzes 1) $A\{[b]\} = \{[b]\}A = A' \subset G$ ($\{\ldots\}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Gruppe), also ist $G = A'B$. Wegen $A' \cap B \ni b$ (b ist ein Zentrumelement von B) und nach Satz A ist die Gruppe G nichteinfach.

Fall 2. $[b]$ erzeugt die Gruppe B. Wir werden mehrere Unterfälle unterscheiden:

a) Gilt $b_i = b$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $b^{-1}Ab = A$, also ist A Normalteiler von G.

b) Ist $[b] \ni b_l \neq b$, so ist $\bar{A}b_l b^{-1} = b_l b^{-1}\bar{A}$. Schreiben wir nämlich das Element $b = a_l^{-1} b_l a'_l$ in $\bar{A}b = b\bar{A}'$ ein, so ergibt sich $\bar{A}b_l = b_l\bar{A}'$. Aus dieser Gleichung und aus $\bar{A}b = b\bar{A}'$ folgt die Behauptung. Man sieht auch, daß $\bar{A}$ durch $b_l b^{-1}$ also auch durch alle Elemente von $[b_i b^{-1}]$ $(i = 1, \ldots, n;\ b_i \in [b])$ in sich transformiert wird.

Man bezeichne mit B' die durch die Elemente sämtlicher $[b_i b^{-1}]$ $(i = 1, \ldots, n)$ erzeugte Gruppe.

b$_1$) Ist $B' = B$, so ist die Gruppe $\bar{A}$ Normalteiler in G.

b$_2$) Ist $B' \subset B$, so gilt $B' \not\ni b$ (wegen $\{[b_1 b^{-1}], \ldots, [b_n b^{-1}], b\} \supseteqq \{b_1 b^{-1}, \ldots, b_n b^{-1}, b\} \supseteqq \{[b]\} = B$). Es ist ferner klar, dass $\{[b_1 b^{-1}], \ldots, [b_n b^{-1}]\}\{b\} \supseteqq$

$\{b_1 b^{-1}, \ldots, b_n b^{-1}\}\{b\} \supseteqq \{[b]\} = B$ gilt, also ist $\{[b_1 b^{-1}], \ldots, [b_n b^{-1}]\}\{b\} = B$ und $AB' = B'A \neq G$. Folglich gelten $G = AB = (AB')(B'\{b\}), AB' \cap B'\{b\} = B'$. Die Gruppe B' ist Normalteiler in $B'\{b\} (= B)$, also ist G nach Satz A nichteinfach. Somit wurde Satz 1 bewiesen.

Bemerkung 1. In dem Beweis benützten wir nur die Eigenschaft der Abelschen Gruppe A, daß jede Untergruppe von A Normalteiler in A ist. Der Satz 1 gilt also auch im Fall, daß A eine Hamiltonsche Gruppe ist.

Bemerkung 2. In dem Beweis war die Bedingung $o(A) \geqq o(B)$ nur beim Beweis der Existenz einer Gleichung $b\bar{A}b^{-1} = \bar{\bar{A}}$ ausgenutzt ($\bar{A}, \bar{\bar{A}} \subset A$; b ist Zentrumelement von B). Folglich ist Satz 1 auch für die unendlichen G richtig, wenn „$o(A) \geqq o(B)$“ durch folgende Bedingung ersetzt wird: A enthält zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Untergruppen, die durch ein Zentrumelement von B ineinander transformierbar sind.

Satz 2. *Man gebe die verschiedenen Zentrumelemente der (endlichen oder unendlichen) Gruppe $G = AB$ $(A \cap B = 1)$ in der Form $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots$ $(a_i \in A; b_i \in B; i = 1, 2, \ldots)$ an. Dann bilden die verschiedenen $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots$ je eine Gruppe A' bzw. B', und die Gruppe $G' = \{a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\} = A'B'$ ist abelsch.*

Beweis. Den Satz werden wir in vier Schritten beweisen.

1. Es gilt $a_i b_i = b_i a_i$ wegen $a_i^{-1}(a_i b_i) a_i = a_i b_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$

2. Die $a_1, a_2, \ldots$ und die $b_1, b_2, \ldots$ bilden je eine Gruppe A' bzw. B', da $(a_i b_i)(a_k b_k) = a_k(a_i b_i) b_k = (a_k a_i)(b_i b_k)$, $(a_i b_i)^{-1} = (b_i a_i)^{-1} = a_i^{-1} b_i^{-1}$ ist.

3. Es ist $A'B' = B'A'$, da wegen $b_i a_k = b_i(a_k b_k) b_k^{-1} = (a_k b_k) b_i b_k^{-1}$ also $B'A' \subseteqq A'B'$ und ähnlich $A'B' \subseteqq B'A'$ gilt. Folglich ist $G' = A'B'$ eine Gruppe.

4. A', B' sind Normalteiler von G'. Aus $a_i(a_k b_k) = (b_k a_k) a_i$ folgt nämlich $b_k^{-1} a_i a_k b_k = a_k a_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Hiernach ist A', desgleichen auch B', in der Tat normal in G'. Also ist $G' = A'B'$ ein direktes Produkt. Einerseits bekamen wir $b_k^{-1} a_i a_k b_k = a_k a_i$, andererseits gilt auch $b_k^{-1} a_i a_k b_k = a_i a_k$, also gilt $a_k a_i = a_i a_k$. Damit ist der Beweis beendet.

Korollar. *Ist $G = AB$ endlich mit $A \cap B = 1$ und sind A, B ohne Zentrum, so ist die Ordnung des Zentrums von G höchstens $\sqrt{o(G)}$.*

In diesem Fall müssen nämlich die $a_1, a_2, \ldots$, desgleichen auch die $b_1, b_2, \ldots$ untereinander verschieden sein, denn ist z. B. $b_1 = b_2 = b$ also $a_1 \neq a_2$, so hat A wegen $a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} = a_1 a_2^{-1} \neq 1$ ein Zentrum, was ein Widerspruch ist. Da also $o(A') = o(B') = o(Z)$ gilt, wo Z das Zentrum von G bezeichnet, so ist in der Tat $o(Z)^2 \leqq o(A) \cdot o(B) = o(G)$.

Literatur.

[1] O. Ore, Contributions to the theory of groups of finite orders, *Duke Math. Journal*, **5** (1938), 431—460.
[2] L. Rédei und J. Szép, On factorisable groups, *diese Acta*, **13** (1950), 235—238.
[3] J. Szép, On factorisable not simple groups, *diese Acta*, **13** (1950), 239—241.
[4] N. Itô, Remarks on factorisable groups, *diese Acta*, **14** (1951), 83—84.
[5] H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **55** (1951), 1—7.
[6] B. Huppert, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **59** (1953), 1—7.
[7] B. Huppert und N. Itô, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II, *Math. Zeitschrift*, **61** (1954), 94—99.

(Eingegangen am 1. August 1954.)