НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОСТОТЫ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ.

Г. Поллак (Сегед).

Упомянутая в заглавии теорема имеет несколько доказательств (см. литературный указатель в конце статьи), но, насколько нам известно, предлагаемое в настоящей работе доказательство является первым, которое пользуется методом математической индукции. Теорема, как известно, гласит:

Знакопеременная группа n-ого порядка $\mathfrak{A}_n$ ($n \geqq 5$) проста.

Доказательство. Сначала докажем, что группа $\mathfrak{A}_5$ проста. В самом деле, пусть $\mathfrak{N}$ ($\neq 1$) — нормальный делитель группы $\mathfrak{A}_5$ и $p \in \mathfrak{N}$ ($p \neq 1$). Порядок p может равняться 2, 3 или 5. Так как совокупность всех элементов одинакового порядка порождает всю группу $\mathfrak{A}_5$, то нам достаточно показать, что вместе с p все элементы того же порядка входят в $\mathfrak{N}$. Но если $o(p)=3$ или 5, то $3|O(\mathfrak{N})$ соответственно $5|O(\mathfrak{N})$ и так как $3^2 \nmid O(\mathfrak{A}_5)$, $5^2 \nmid O(\mathfrak{A}_5)$, то $3 \nmid O(\mathfrak{A}_5/\mathfrak{N})$ соответственно $5 \nmid O(\mathfrak{A}_5/\mathfrak{N})$. Отсюда следует, что фактор-группа $\mathfrak{A}_5/\mathfrak{N}$ не содержит элементов третьего, соответственно пятого порядка, что влечет за собой верность нашего утверждения. Если же $p=(i_1 i_2)(i_3 i_4)$, то $\mathfrak{N}$ содержит вместе с ним и $p'=(i_1 i_2 i_3)\,p\,(i_3 i_2 i_1)=(i_1 i_4)(i_2 i_3)$ и так как p и p' порождают четверную группу Клейна, то $4|O(\mathfrak{N})$, $8 \nmid O(\mathfrak{A}_5)$ и мы можем повторить рассуждения, примененные в случае $o(p)=3$ или 5.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{A}_n$ ($n>5$). Предположим, что $\mathfrak{A}_{n-1}$ проста и $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{A}_n$. Обозначим через $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$ знакопеременную группу подстановок номеров $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ ($i=1, \ldots, n$). Так как $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$ является нормальным делителем в $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$, то вследствие индукционного предположения возможен только один из случаев

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(i)} = \begin{cases} 1 \\ \mathfrak{A}_{n-1}^{(i)} \end{cases} \tag{1}$$

для каждого i. Пусть сначала для какого-нибудь i имеет место (1_2). Тогда, так как при $n>5$ для $j \neq i$ имеет место $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(j)} \neq 1$, то и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}_{n-1}^{(j)} \neq 1$ и следовательно также $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{A}_{n-1}^{(j)}$. Но $\mathfrak{A}_{n-1}^{(i)}$ и $\mathfrak{A}_{n-1}^{(j)}$ совместно уже порождают всю $\mathfrak{A}_n$ и поэтому $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}_n$. Если же для всех i имеет место (1_1), то это значит, что отличные от тождественной подстановки из $\mathfrak{N}$ не оставляют на месте ни одного номера. Пусть теперь $p \in \mathfrak{N}$, $p \neq 1$ и

$$p = (i_1 i_2 i_3 \cdots i_{k_1}) \cdots (i_{k_s+1} \cdots i_{n-1} i_n).$$

Тогда

$$p' = (i_1 i_2)(i_3 i_n)\, p (i_1 i_2)(i_3 i_n)$$

тоже входит в $\mathfrak{N}$ и подстановка pp' оставляет на месте i_2, но она не равна единице, так как она ввиду $n > 5$ переставляет i_n. Поэтому $\mathfrak{N}$ не может иметь отличных от 1 элементов. Тем самым мы доказали, что $\mathfrak{A}_n$ имеет только тривиальные нормальные делители, что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА.

M. Bauer, Über die alternierende Gruppe, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1934), 222—223.

А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953), 59—61.

L. Rédei, Die Einfachheit der alternierenden Gruppe, *Monatshefte für Math.*, **55** (1951), 328—329.

B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*. Bd. 1 (Berlin, 1930), 144—145.

(Поступило 15/II 1955 г.)