Über orthogonale Reihen.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag.

1. Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein orthogonales und normiertes Funktionensystem im Intervall $[a, b]$. Wir betrachten die Orthogonalreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten a_k, die der Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

genügen. Es sei gesetzt:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

und das n-te $(C, \alpha > 0)$-Mittel der Folge $\{[s_\nu(x) - f(x)]^2\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ bezeichnen wir mit $\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x)$, d. h.

$$\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - f(x)]^2,$$

$$A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Ein bekannter Satz von A. ZYGMUND behauptet folgendes: wenn die Reihe (1) im Intervall $[a, b]$ fast überall zur Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-summierbar ist, dann gilt in $[a, b]$ fast überall

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - f]^2; x) = 0.\ ^{1})$$

Es wirft sich die Frage auf, ob die stärkere Behauptung gilt, daß bei der selben Voraussetzung auch die (C, α)-Mittel $(0 < \alpha < 1)$ der Folge $\{[s_\nu(x) - f(x)]^2\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ in $[a, b]$ fast überall gegen 0 konvergieren. In Zusammenhang mit diesem Problem beweisen wir den folgenden Satz:

---

1) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356–362.

Satz. *Wenn die Reihe* (1) *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall zur Funktion* $f(x)$ $(C, 1)$*-summierbar ist, dann besteht in* $[a, b]$ *fast überall die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

2. Dem Beweise des Satzes schicken wir einen Hilfssatz voraus. Wir definieren eine Indexfolge m_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ folgenderweise: sei $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, und für $\nu > 1$, $2^m < \nu \leqq 2^{m+1}$, sei $m_\nu = 2^m$.

Hilfssatz. *Es gilt fast überall im Intervall* $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0.$$

Zum Beweis des Hilfssatzes genügt es nach einem bekannten Satz[2]) zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} \tag{2}$$

in $[a, b]$ fast überall konvergiert. Da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2}{\nu} \leqq$$
$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} (a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

ist, so ergibt sich mit Anwendung des Konvergenzsatzes von B. Levi, daß die Reihe (2) fast überall konvergiert. Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

3. Beweis des Satzes. Auf Grund der elementaren Ungleichung $(u+v)^2 \leqq 2(u^2+v^2)$ erhält man:

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) \leqq 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) + 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{m_\nu} - f]^2; x).$$

Nach einem bekannten Satze[3]) folgt aus unserer Voraussetzung $\lim_{m\to\infty} s_{2^m}(x) = f(x)$ fast überall in $[a, b]$, also konvergiert das zweite Glied an der rechten Seite fast überall in $[a, b]$ gegen 0, wenn $n \to \infty$. So ist auf Grund der obigen Ungleichung hinreichend zu zeigen, daß in $[a, b]$ fast überall

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0 \tag{3}$$

ist.

---

[2]) Siehe z. B. A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935), Seite 43.

[3]) A. N. Kolmogorov, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

Da bekanntlich $A_{2^n}^{(\alpha)} \sim 2^{n\alpha}$ und so $A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \leqq c 2^{n(\alpha-1)}$ für $0 \leqq \nu \leqq 2^{n-1}$ besteht, gilt die folgende Abschätzung:

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = O(1)\,\sigma_{2^n-1}^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) +$$
$$+ \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2.$$

Unter Anwendung unseres Hilfssatzes ergibt sich, daß das erste Glied der rechten Seite fast überall in $[a, b]$ gegen 0 konvergiert, wenn $n \to \infty$. Um (3) zu beweisen reicht es also hin zu zeigen, daß das zweite Glied auch gegen 0 konvergiert, fast überall in $[a, b]$.

Hierzu genügt es aber zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 \tag{4}$$

in $[a, b]$ fast überall konvergiert. Da $A_k^{(\alpha)} \sim (k+1)^\alpha$, gewinnen wir durch gliedweise Integration

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 dx = \tag{5}$$
$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2).$$

Wir betrachten die folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) =$$
$$= (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} =$$
$$= (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} k^{\alpha-1} = O(1)\,(a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2).$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 dx \leqq M \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

und so folgt mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe (4) in $[a, b]$ fast überall konvergiert.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 10. Februar 1955.)