Metrische Dualität der allgemeinen Räume.

Von ARTHUR MOÓR in Debrecen.

Einleitung.

In der neueren Entwicklung der Geometrie, sowie in der Physik haben Variationsprobleme von der Form

$$(0.1) \qquad \delta \int_{\alpha}^{\beta} F(x, \dot{x})\, dt = 0$$

eine grundlegende Bedeutung [1]. Diese Variationsprobleme kann man sowohl vom Standpunkt der Funktionentheorie, wie vom Standpunkt der Geometrie untersuchen.

A. L. UNDERHILL bestimmte zuerst die Invarianten des Variationsproblems (0.1) in seiner Arbeit [2] [15] mit analytischen Methoden. Die geometrische Charakterisierung des Variationsproblems (0.1), die zuerst systematisch von P. FINSLER durchgeführt wurde, ist zum Ausgangspunkt der Theorie der allgemeinen differentialgeometrischen Räume geworden. (Vgl. [8] und [4].) Diese Theorie wurde in vielen Abhandlungen behandelt, und neben dem Variationsproblem (0.1) hat man bald auch Variationsprobleme mit mehreren Veränderlichen „geometrisiert". In erster Reihe kommen hier die Variationsprobleme von der Form

$$(0.2) \qquad \delta \int_{(n-1)} \frac{F(x, u)}{u_n}\, dx^1 \cdots dx^{n-1} = 0$$

in Betracht, wo die u_i die Bestimmungszahlen der Hyperflächenelemente bedeuten. Die funktionentheoretische Untersuchung des Variationsproblems (0.2) hat zuerst L. KOSCHMIEDER durchgeführt und die zu (0.2) gebundenen Invarianten bestimmt. [3]

Die Entwicklung der geometrischen Theorie des Variationsproblems (0.2) haben E. CARTAN und L. BERWALD in den Abhandlungen [1] und [3]

---

[1]) Wenn es nicht anders gesetzt wird, bedeutet x immer die n Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ eines Punktes im n-dimensionalen Raum. Entsprechend ist $\dot{x} = \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten auf das Schriftenverzeichnis am Ende unserer Arbeit.

[3]) Vgl. für die Untersuchungen L. KOSCHMIEDERS das Schriftenverzeichnis von [6].

durchgeführt. Diese Geometrien lassen sich dadurch kennzeichnen, daß ihr Grundelement das Hyperflächenelement (x, u) ist, und daß durch eine Fundamentalfunktion $F(x, u)$ die Oberfläche in diesen Räumen für Hyperflächen definiert ist. Von $F(x, u)$ ausgehend kann man einen metrischen Fundamentaltensor g_{ik} definieren, und dann mit Hilfe von g_{ik} die Länge der Vektoren, und alle charakteristische Größen des Raumes bestimmen. Diese Räume nennt man Cartansche Räume, während die durch (0. 1) bestimmten Räume die Finslerschen Räume sind. Die letzteren sind dadurch gekennzeichnet, daß ihr Grundelement das Linienelement $(x, \dot{x})$ ist, und daß die metrische Fundamentalfunktion $F(x, \dot{x})$ die Länge der Kurven

$$x^i = x^i(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta$$

zwischen den Grenzen α, β bestimmt. Der metrische Fundamentaltensor und die weiteren grundlegenden Größen des Raumes sind — wie im Cartanschen Raum — auch aus $F(x, \dot{x})$ ableitbar. In diesen Räumen spielt ein kontravarianter Vektor bzw. eine kovariante Vektordichte eine fundamentale Rolle.

Bei der neueren Entwicklung der Geometrie der allgemeinen Räume hat man einen einheitlichen Gesichtspunkt dadurch erzielt, daß man für das Grundelement eine Vektordichte vom Gewicht p gewählt hat. In dieser Verallgemeinerung sind dann sowohl die Finslerschen, wie die Cartanschen Räume enthalten. In den Arbeiten [14], [6] und [5] wurden die Fundamentaltensoren, und mit Hilfe des invarianten Differentials die Parallelübertragung in diesen allgemeinen metrischen Räumen bestimmt.

Das Ziel unseres Artikels ist die Untersuchung der metrischen Dualität der allgemeinen Räume. Ihre genaue Definition ist in § 2 angegeben. Wir erwähnen hier einleitend nur so viel, daß es sich um eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Grundelemente beider Räume handelt, für die die metrischen Fundamentaltensoren in entsprechenden Elementen übereinstimmen. Falls die Grundelemente der dualen Räume kontravariante bzw. kovariante Vektordichten sind, behandeln wir das Dualitätsproblem mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes.

Die Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes ist an sich eine interessante und wichtige Methode, da mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes die Struktur des allgemeinen Raumes längs einer Folge der Grundelemente einfacher wird, als im allgemeinen Fall. (Vgl. [16], [11], [12] und [13].) Als wichtigstes Ergebnis bekommen wir, daß man durch die Dualisierung die Fundamentaltensoren des einen Raumes aus denen des anderen gewinnen kann. Demnach *existiert zwischen dem kontravarianten und kovarianten Fall kein prinzipieller Unterschied.* Diese Ergebnisse haben wir in Satz V bzw. VI formuliert.

§ 1. Fundamentalgrößen der allgemeinen metrischen Räume.

In diesem Pragraphen werden wir die Fundamentalbegriffe und die Fundamentalgrößen der Geometrie der allgemeinen metrischen Räume zusammenstellen. Die vollständige Entwicklung dieser Theorie befindet sich in den Arbeiten [5], [6] und [14].

Ein allgemeiner metrischer Raum $\mathfrak{R}_n$ ist eine Mannigfaltigkeit von kovarianten oder kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $-p$ bzw. $+q$ — sie sind die Grundelemente des Raumes — für die eine Grundfunktion $L(x, t)$ existiert. Die Grundfunktion $L(x, t)$, — wo t_i bzw. t^i die Komponenten der Vektordichte bedeuten — soll in den t positiv homogen von erster Dimension sein und außerdem nach ihren Argumenten mindestens viermal stetig differenzierbar sein.

Im folgenden bezeichnen wir die Grundelemente des Raumes $\mathfrak{R}_n$, falls sie kovariante Vektordichten vom Gewicht $-p$ sind, mit u_i, und falls sie kontravariante Vektordichten vom Gewicht $+q$ sind, mit v^i. Bei einer Koordinatentransformation

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x),$$

die umkehrbar und eindeutig sein soll, transformieren sich also die Grundelemente nach den Transformationsgesetzen:

$$\text{(1.1a)} \quad \bar{u}_r = \Delta^{-p} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r} u_i, \qquad \text{(1.1b)} \quad \overline{v}^s = \Delta^q \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^k} v^k,$$

wo

$$\Delta = \operatorname{Det}\left| \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^b} \right|$$

die Substitutionsdeterminante der Koordinatentransformation bedeutet.

Aus der metrischen Grundfunktion kann man den metrischen Grundtensor g_{ik} aus den Gleichungen ($np \neq 1$, $nq \neq 1$)

$$\text{(1.2a)} \quad g^{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{p}{np-1}} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial u_i \partial u_k}, \qquad \text{(1.2b)} \quad g_{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{q}{nq-1}} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial v^i \partial v^k}$$

bestimmen, wo $\mathfrak{a}$ in den beiden Fällen

$$\text{(a)} \quad \mathfrak{a} = \operatorname{Det}|a^{ij}|, \quad a^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_j}, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{a} = \operatorname{Det}|a_{ij}|, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^i \partial v^j}$$

bedeutet[4]). Durch die Formeln

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = k, \\ 0, & \text{wenn } i \neq k, \end{cases}$$

---

[4]) Wir definieren $\mathfrak{a}$ im kovarianten Fall anders, als E. T. Davies in [6] die entsprechende Größe definiert hat. Setzt man im kovarianten Fall $\mathfrak{a} = a^{-1}$, dann erhält man die Bezeichnung von E. T. Davies. Dies kommt auch in der Formel (1.2a) im Vergleich zur Gleichung (1.4) von [6] zum Vorschein. Unsere Bezeichnung wird auch von L. Berwald in seiner Arbeit [1] für den Fall $p = 1$ benützt.

kann man in beiden Fällen die rein kontravarianten bzw. die rein kovarianten Komponenten des metrischen Grundtensors bestimmen. Mit Hilfe des metrischen Grundtensors kann man die Tensoren in gewöhnlicher Weise mit kovarianten oder kontravarianten Komponenten darstellen.

Bilden wir die Determinante

$$g = \text{Det}\,|g_{ik}|,$$

so haben wir eine wichtige Grundgröße des Raumes $\mathfrak{R}_n$ erhalten. Aus der Transformationsformel der g_{ik} folgt nämlich, daß $\sqrt{g}$ eine Skalarendichte vom Gewicht $+1$ ist, ihre Transformationsformel lautet also:

$$\text{(1.3)} \qquad \sqrt{\bar{g}} = \Delta\sqrt{g}, \qquad \Delta = \text{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right|.$$

Diese Gleichung zeigt, daß das Inhaltsmaß in $\mathfrak{R}_n$ mit Hilfe von $\sqrt{g}$ definiert werden kann, allerdings nur in bezug auf eine ausgezeichnete Folge oder ein Feld der Grundelemente. *Ist $\sqrt{g}$ nur vom Orte abhängig, dann existiert im Raum ein Inhaltsmaß im gewöhnlichen Sinne* (vgl. [2], § 1 und [11], S. 358).

Die Grundfunktion können wir mit Hilfe des metrischen Grundtensors in der Form:

$$\text{(1.4a)} \quad L^2(x, u) = g^p g^{ij} u_i u_j, \qquad \text{(1.4b)} \quad L^2(x, v) = g^{-q} g_{ij} v^i v^j$$

darstellen. Aus den Formeln (1.2) kann man sofort feststellen, daß die g_{ik} und somit auch g in den u_i, bzw. v^i homogen von nullter Dimension sind. Wir bemerken jetzt, daß mit Ausnahme der Grundfunktion alle übrigen den Raum charakterisierenden Größen in den u_i bzw. v^i homogen von nullter Dimension sind.

Die Komponenten des Einheitsvektors, der die Richtung seines Grundelementes hat, sind in den beiden Fällen:

$$\text{(1.5a)} \qquad l_i = \frac{\sqrt{g^p}}{L} u_i, \qquad l^i = \frac{1}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial L}{\partial u_i}$$

$$\text{(1.5b)} \qquad l^i = \frac{1}{L\sqrt{g^q}} v^i, \qquad l_i = \sqrt{g^q} \frac{\partial L}{\partial v^i}.$$

Wir führen die Bezeichnung

$$\text{(a)} \quad f(x, u)\,\|^k = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial f}{\partial u_k}, \qquad \text{(b)} \quad f(x, v)\,\|_k = L\sqrt{g^q} \frac{\partial f}{\partial v^k}$$

ein, wo f eine homogene Funktion bedeutet. Offenbar ist die Operation $\|^k$ bzw. $\|_k$ eine tensorielle Operation, die auch den Homogenitätsgrad der Funktionen nicht ändert. Mit Hilfe dieser Operation läßt sich der Torsionstensor durch die Formel

(1.6a) $A^{ijk} = -\frac{1}{2} g^{ij}\|^{k}$, (1.6b) $A_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij}\|_{k}$

festlegen. Durch Verjüngung erhält man aus (1.6) den Torsionsvektor

(1.7a) $A^{i} = A_{m}{}^{mi} = (\log \sqrt{g})\|^{i}$, (1.7b) $A_{i} = A^{m}{}_{mi} = (\log \sqrt{g})\|_{i}$

bzw.

(1.8a) $A^{mi}{}_{m} = \{1-(n-1)p\} A^{i}$, (1.8b) $A_{im}{}^{m} = \{1-(n-1)q\} A_{i}$.

Der Torsionstensor ist in seinen ersten beiden Indizes symmetrisch; aus (1.2) folgt aber, daß er nur im Falle $p=0$, bzw. $q=0$, oder falls a nur von x^{i} abhängt, in allen Indizes symmetrisch ist. Bezeichnen wir die Kontraktion mit dem Einheitsvektor l^{i}, wie gewöhnlich, mit „o", so wird

(1.9a) $A^{oik} = A^{iok} = p\, l^{i} A^{k}$, (1.9b) $A_{oik} = A_{iok} = q\, l_{i} A_{k}$

und nach (1.6)

(1.10) $A^{ijo} = 0, \qquad A^{o} = 0$

in beiden Fällen. Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob die Indizes oben oder unten stehen.

Die Übertragungsparameter der Parallelverschiebung sind:

(1.11a)
$$\Gamma^{*j}_{i\ k} = \gamma_{i\ k}^{\ j} + g^{jr}\{[A_{ir}{}^{m}[(\delta^{s}_{k} - l^{s} l_{k})\,\delta^{t}_{m} + \\ + K^{t}_{w}(l_{k}\delta^{w}_{m} - A_{km}{}^{w})(l^{s} + pA^{s})]] + [i, r, k]\}\,\gamma^{o}_{ts}$$

bzw.

(1.11b)
$$\Gamma^{*j}_{i\ k} = \gamma_{i\ k}^{\ j} - g^{jr}\{[A_{ir}{}^{m}[(\delta^{s}_{k} - l^{s} l_{k})\,g_{tm} + \\ + K^{p}_{w}(l_{k}\delta^{w}_{m} - A_{km}{}^{w})(l^{s} g_{tp} + q\,\delta^{s}_{p} A_{t})]] + [i, r, k]\}\,\gamma_{o\ s}^{\ t},$$

wo

$$\gamma_{i\ k}^{\ j} = \frac{1}{2} g^{jr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{r}}\right)$$

is. Wir setzen voraus, daß der Tensor

(1.12) $H^{b}_{a} = \delta^{b}_{a} + A_{oo}{}^{r} A_{or}{}^{b}$

vom Range n ist und daher der zu ihm reziproke Tensor K^{c}_{b} existiert, für den also

(1.13) $H^{b}_{a} K^{c}_{b} = H^{c}_{b} K^{b}_{a} = \delta^{c}_{a}$

besteht. Das Symbol $[i, r, k]$ drückt aus, daß in (1.11a) und (1.11b) noch zwei weitere Glieder auftreten, wo aber i, r, k zyklisch vertauscht sind und im letzten Glied noch das Vorzeichen geändert wird. (Vgl. [5] Gleichung (1.7).)

In (1.11) kann man nach der Gleichung (1.9a) bzw. (1.9b)

(1.14a) $pA^{r} = A_{oo}{}^{r}$, bzw. (1.14b) $qA_{r} = A_{oor}$.

setzen. Die Hauptkrümmungstensoren sind:

(1. 15a) $$\widetilde{R}_{m\ jk}^{\ i} = \frac{\partial \Gamma^{*\ i}_{m\ j}}{\partial x^k} + \Gamma^{*\ i}_{m\ j}\|^r \Gamma^{*}_{rok} + \Gamma^{*\ r}_{m\ j} \Gamma^{*\ i}_{r\ k} - [j|k],$$

(1. 15b) $$\widetilde{R}_{m\ jk}^{\ i} = \frac{\partial \Gamma^{*\ i}_{m\ j}}{\partial x^k} - \Gamma^{*\ i}_{m\ j}\|_r \Gamma^{*\ r}_{o\ k} + \Gamma^{*\ r}_{m\ j} \Gamma^{*\ i}_{r\ k} - [j|k],$$

wo das Symbol $[j|k]$ den ganzen vorigen Ausdruck mit vertauschten Indizes j und k bedeutet.

§ 2. Zuordnung der Grundelemente der dualen Räume.

Es seien $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ zwei allgemeine metrische Räume[5]), mit den Grundelementen (x, z) und (x, z^*), wobei (x, z) und (x, z^*) entweder eine kovariante, oder eine kontravariante Vektordichte bedeutet.

D e f i n i t i o n. *$\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ werden als duale Räume bezeichnet, falls eine ein-eindeutige Zuordnung*

(2. 1) $$\begin{cases} x^i \equiv x^i, \\ z^i = \varphi^i(x, z^*), \end{cases} \qquad \left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial z^{*k}} \right| \neq 0$$

der Grundelemente existiert, für die

(2. 2) $$g_{ik}(x, z) = g^*_{ik}(x, z^*)$$

besteht, wo g_{ik} bzw. g^*_{ik} die entsprechenden Grundtensoren der Räume $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^*$ bedeuten. Dabei werden die Funktionen $\varphi^i(x, z^*)$ entsprechend den drei möglichen Fällen spezielle Formen haben, die wir im folgenden angeben werden.

Der Fall A). Wir nehmen an, daß die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ kovariante Vektordichten vom Gewicht $-p$, die von $\mathfrak{R}_n^*$ hingegen kovariante Vektordichten vom Gewicht $-q$ sind. Bezeichnen wir die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^*$ mit u_i bzw. u_i^*, dann sollen u_i und u_i^* durch die Relationen

(2. 3) $$u_i = \left(\sqrt{g^*(x, u^*)}\right)^{-p+q} u_i^*, \qquad g^* = \mathrm{Det}\,|g^*_{ik}|$$

zusammenhängen. Wenn noch (2. 2) besteht, dann sind $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ duale Räume. Die Relationen (2. 3) sind invariant in bezug auf eine Koordinatentransformation, wie das nach (1. 1a) und (1. 3) sofort bestätigt werden kann. Aus (2. 2) folgt noch sofort, daß

(2. 4) $$g(x, u) = g^*(x, u^*)$$

besteht.

---

5) Die Größen von $\mathfrak{R}_n^*$ werden wir immer mit einem Stern kennzeichnen.

Der Fall B). Die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^*$ seien jetzt kontravariante Vektordichten vom Gewicht q bzw. s. Die Zuordnung (2. 1) soll jetzt von der Form:

(2. 5) $$v^i = \left(\sqrt{g^*(x, v^*)}\right)^{q-s} v^{*i}$$

sein. Die Relation (2. 5) ist nach (1. 1b) und (1. 3) wieder koordinateninvariant.

Der Fall C). Das Grundelement u_i von $\mathfrak{R}_n$ sei eine kovariante Vektordichte vom Gewicht $-p$, das von $\mathfrak{R}_n^*$ aber eine kontravariante Vektordichte v^i [6]) vom Gewicht $+q$. Die Relation (2. 1) ist in diesem Fall von der Form:

(2. 6) $$u^i = \left(\sqrt{g^*(x, v)}\right)^{-p-q} g^*_{ij}(x, v) v^j.$$

Die Umkehrung der Relationen (2. 1) ist in diesem Falle durch

(2. 7) $$v^k = \left(\sqrt{g(x, u)}\right)^{p+q} g^{ik}(x, u) u_i$$

angegeben, da nach (2. 2) offenbar auch $g^{ik}(x, u) = g^{*ik}(x, v)$ folgt. Offensichtlich sind die Gleichungen (2. 6), (2. 7) invariant in bezug auf eine Koordinatentransformation. Das folgt sofort auf Grund der Gleichungen (1. 1) und (1. 3).

Die Übereinstimmung der Grundelemente und der Grundtensoren bestimmen die Dualität; im nächsten § werden wir aber zeigen, daß diese Zuordnung nur dann möglich ist, wenn entweder der Torsionsvektor verschwindet, oder die Gewichte der Grundelemente in den Fällen *A)* und *B)* einander gleich sind, während im Falle *C)* die Gewichte von u_i und v^i entgegengesetzt gleich sind. In den Fällen *A)* und *B)* bedeutet aber die Identität der Gewichte nach (2. 2) und (2. 3) bzw. nach (2. 2) und (2. 5) die Identität von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$. Nur im Falle *C)* gibt das eine neue Möglichkeit.

Bemerkung. Aus (2. 2) folgt, daß wenn ein Tensor von $\mathfrak{R}_n$ in kovarianten Komponenten mit einem Tensor von $\mathfrak{R}_n^*$ übereinstimmt, diese dann auch in kontravarianten Komponenten übereinstimmen.

§ 3. Übereinstimmung der Grundtensoren.

Im vorigen §-en haben wir die Dualität der allgemeinen metrischen Räume definiert, jetzt wollen wir die Identität von weiteren charakteristischen Größen beweisen.

Der Fall A). Aus (1. 4a) folgt nach den Gleichungen (2. 2) und (2. 3)

(3. 1) $$L(x, u) = L^*(x, u^*),$$

wo L und L^* die entsprechenden Grundfunktionen der Räume bedeuten. Nach

[6]) Da kein Mißverständnis vorhanden sein kann, schreiben wir statt v^{*i} nur v^i.

der zweiten Gleichung von (1. 5a) wird wegen (3. 1):

$$l^i = \frac{1}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial L^*}{\partial u_j^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial u_i}. \tag{3. 2}$$

Aus (2. 3) und (2. 4) hat man aber

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial u_i} = (p-q)\,(\sqrt{g})^{p-q} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u_i} u_j + (\sqrt{g})^{p-q} \delta_j^i.$$

Diese Gleichung kann man nach (1. 5a) und (1. 7a) in der Form:

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial u_i} = (\sqrt{g})^{p-q}[(p-q)A^i l_j + \delta_j^i] \tag{3. 3}$$

schreiben; es wird also aus (3. 2), wenn wir die zweite Gleichung von (1. 5a) beachten (in diesem Falle aber für die Größen von $\mathfrak{R}_n^*$):

$$l^i = (p-q)A^i l^{*j} l_j + l^{*i}. \tag{3. 4}$$

Aus den Gleichungen (2. 3), (2. 4) und (3. 1) folgt aber auf Grund von (1. 5a) unmittelbar, daß

$$l^i(x, u) = l^{*i}(x, u^*) \tag{3. 5}$$

besteht. Somit wird nach (3. 4) entweder $p = q$, oder $A^i = 0$.

Die Gleichung (3. 3) bekommt also die Form:

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial u_i} = (\sqrt{g})^{p-q} \delta_j^i. \tag{3. 6}$$

Aus den Gleichungen (2. 2) und (3. 6) erhalten wir nach (1. 6a):

$$A^{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{L^*}{\sqrt{g^{*p}}} \frac{\partial g^{*ij}}{\partial u_r^*} \frac{\partial u_r^*}{\partial u_k} = A^{*ijk}.$$

Wie am Schluß des zweiten § bemerkt wurde, ist außer den trivialen Fall $p = q$ eine Dualität zwischen Räume von kovarianten Vektordichten nur dann möglich, wenn die Torsionsvektoren verschwinden.

Der Fall B). In diesem Falle können wir ganz ähnlich verfahren, wie im Fall *A)*. Nach (2. 5) und (1. 4b) bekommen wir sofort

$$L(x, v) = L^*(x, v^*) \tag{3. 7}$$

und aus (2. 5) und (1. 5b) wird wieder:

$$l^i(x, v) = l^{*i}(x, v^*). \tag{3. 8}$$

Mit der vorigen Methode erhält man auf Grund der zweiten Gleichung von (1. 5b) daß entweder $q = s$, oder $A^{*i} = 0$ besteht. Aus (2. 2) kann man auch jetzt unmittelbar

$$A_{ijk}(x, v) = A_{ijk}^*(x, v^*), \tag{3. 9}$$

$$\frac{\partial v^j}{\partial v^{*i}} = (\sqrt{g})^{q-s} \delta_i^j \tag{3. 10}$$

herleiten.

Der Fall C). Beachten wir in diesem Falle noch die Gleichung

$$g^*_{ij}(x,v)g^{im}(x,u)=\delta^m_j,$$

die nach (2. 2) offenbar besteht, so bekommt man aus (2. 7) nach der Identität (1. 4b) unmittelbar die Relation:

$$L(x,u)=L^*(x,v) \tag{3.11}$$

und somit wird aus (2. 6)

$$l_i(x,u)=l^*_i(x,v). \tag{3.12}$$

Die Herleitung der Formel für $\frac{\partial u_r}{\partial v^k}$ ist etwas länger. Aus der Gleichung (2. 6) bekommt man nach (1. 5b), (1. 6b) und (1. 7b):

$$\frac{\partial u_r}{\partial v^k}=(\sqrt{g})^{-p-q}[-(p+q)A^*_k l^*_r+2A^*_{srk}l^{*s}+g^*_{rk}].$$

Nach (1. 9b) bekommt man aus dieser Gleichung:

$$\frac{\partial u_r}{\partial v^k}=(\sqrt{g})^{-p-q}[(q-p)A^*_k l^*_r+g^*_{rk}]. \tag{3.13}$$

Differenzieren wir jetzt (3. 11) nach v^k, so wird nach der zweiten Gleichung von (1. 5b):

$$l^*_k=\sqrt{g^q}\,\frac{\partial L}{\partial u_r}\,\frac{\partial u_r}{\partial v^k}.$$

Setzen wir in diese Gleichung den Wert $\frac{\partial u_r}{\partial v^k}$ aus (3. 13) ein, so muß wegen (2. 2) und (3. 12) entweder $p=q$, oder $A^*_k=0$ bestehen. Aus (3. 13) wird jetzt:

$$\frac{\partial u_r}{\partial v^k}=(\sqrt{g})^{-p-q}g^*_{rk}. \tag{3.14}$$

Nach (2. 2) und (3. 14) bekommen wir für die Torsionstensoren der Räume:

$$A^*_{ijk}=A_{ijk},$$

es ist nämlich:

$$\frac{1}{2}g_{ij}\|^r g_{rk}=A_{ijk}.$$

Unsere bisherigen Resultate können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

S a t z I. *Für die Dualität der allgemeinen metrischen Räume $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}^*_n$ ist notwendig, daß entweder das Gewicht der Grundelemente bis auf das Vorzeichen einander gleich sei, oder daß der Torsionsvektor A^i verschwinde. Im Falle A) und B) stimmt das Vorzeichen der Gewichte überein, im Falle C) ist es aber nach* (1. 1) *verschieden.*

Wir werden im folgenden sehen, daß diese Bedingungen schon hinreichend sind, wenn noch die metrischen Grundtensoren in entsprechenden

Grundelementen übereinstimmen; vgl. dazu den Satz V. der eben diese Tatsache beweist. Offensichtlich folgt aus dem Satz I, nach (1. 7) der

Satz II. *In den dualisierbaren Räumen mit $p \neq q$ existiert immer ein Inhaltsmaß im gewöhnlichen Sinne.*

(Im Falle *A)* und *B)* sind die Gewichte, wie schon bemerkt wurde, immer verschieden.)

Die Finslerschen Räume, für die $A_i = 0$ und $L(x, \dot{x}) > 0$ besteht, sind aber nach einem Satze von A. DEICKE (vgl. [7]) mit den Riemannschen Räumen identisch. Ist ein allgemeiner Raum mit $p \neq 0$ zu einem Finslerraum dual, dann ist nach Satz I für beide Räume $A_i = 0$. Somit hat in diesen Räumen der metrische Grundtensor die Form:

$$g_{ik} = \overset{\bullet}{g}_{ik}(x). \tag{3. 15}$$

Diese Räume sind also im wesentlichen auch Riemannsche Räume. Läßt man die Bedingung $L(x, u) > 0$ oder $L(x, v) > 0$ fallen, will man also nur solche Räume berücksichtigen, deren Metrik nicht positiv definit ist, wie sie z. B. in der Relativitätstheorie benutzt werden (vgl. etwa [10]), so folgt aus $A_i = 0$ nicht, daß der Tensor g_{ik} die Form (3. 15) hat. Ein Beispiel für einen solchen Raum befindet sich in L. BERWALDS Arbeit [2], Fußnote 39 auf Seite 161. Vom geometrischen Standpunkt aus ist es zweckmäßig in diesen Räumen unsere Betrachtungen auf solche Teilbereiche der Grundelemente beschränken, in denen $L > 0$ besteht. Offenbar kann man in diesen Räumen, ebenso wie in der Relativitätstheorie, den „Nullkegel" konstruieren. (Vgl. [10] S. 252—254.) Die Konstruktion wollen wir aber jetzt nicht durchführen, da diese in erster Reihe ein physikalisches Interesse hat.

Das zitierte Beispiel von L. BERWALD kann man leicht auf allgemeine Räume übertragen. Das beruht auf der Tatsache, daß falls $F(x, z^1, \ldots, z^n)$ eine Funktion bedeutet, die ebensolche Eigenschaften hat, wie die Grundfunktion $L(x, u)$, dann

$$\hat{g} \equiv \operatorname{Det} |f_{ik}| = F^{n+1} F_1$$

mit

$$f_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^i \partial z^k}, \qquad F_1 = -\frac{1}{F^2} \operatorname{Det} \left| \begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^i \partial z^k} & \dfrac{\partial F}{\partial z^k} \\ \hdashline \dfrac{\partial F}{\partial z^i} & 0 \end{array} \right|$$

ist. Es sei jetzt $F(x, z) = L(x, u)$, so wird, wenn wir $z^i = u_i$ setzen (da es jetzt um eine rein formale Rechnung handelt, kommt die Stellung der Indizes nicht in Betracht):

$$L_1 = -\frac{1}{L^2} \operatorname{Det} \left| \begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_k} & \dfrac{\partial L}{\partial u_k} \\ \hdashline \dfrac{\partial L}{\partial u_i} & 0 \end{array} \right|. \tag{3. 16a}$$

Entsprechend ist im kontravarianten Fall:

$$(3.16\text{b})\qquad L_1 = -\frac{1}{L^2}\operatorname{Det}\left|\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^k} & \dfrac{\partial L}{\partial v^k} \\ \hdashline \dfrac{\partial L}{\partial v^i} & 0 \end{array}\right|.$$

Es ist also in beiden Fällen

$$\mathfrak{a} = L^{n+1} L_1$$

und nach

$$\text{(a)}\quad g = \mathfrak{a}^{\frac{1}{np-1}}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad g = \mathfrak{a}^{-\frac{1}{nq-1}};$$

wird

$$(3.17\text{a})\quad g = L^{\frac{n+1}{np-1}} L_1^{\frac{1}{np-1}}, \qquad\qquad (3.17\text{b})\quad g = L^{-\frac{n+1}{nq-1}} L_1^{-\frac{1}{nq-1}}.$$

Ebenso wie in der Cartanschen Geometrie ergeben die Grundfunktionen

$$\text{(a)}\quad L(x, u) = (u_1 u_2 \ldots u_n)^{\frac{1}{n}}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad L(x, v) = (v^1 v^2 \ldots v^n)^{\frac{1}{n}}$$

solche Räume, für die $A_i = 0$ besteht, wenn nur n ungerade ist. In beiden Fällen wird L_1 die Form

$$L_1 = \psi(n) L^{-n-1}$$

haben. Man kann im allgemeinen einen Raum $\mathfrak{R}_n$ mit $A^i = 0$ dadurch charakterisieren, daß seine Grundfunktion die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(3.18)\qquad L_1 = \varphi(x) L^{-n-1}$$

ist, wo L_1 durch (3.16a) bzw. im kontravarianten Fall durch (3.16b) angegeben ist.

Zum Schluß dieses Paragraphen bemerken wir, daß in den Fällen *A)* und *B)* aus

$$f(x, u) = f^*(x, u^*), \quad f(x, v) = f^*(x, v^*)$$

nach (3.6) und (3.10) die Identitäten

$$(3.19\text{a})\quad f\|^k = f^*\|^k \qquad\qquad (3{,}19\text{b})\quad f\|_k = f^*\|_k$$

folgen, wenn f und f^* zwei Größen der Räume $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ sind. Im Falle *C)* folgt nach (3.14):

$$(3.20)\qquad f^*\|_k = g_{rk} f\|^r,$$

wenn

$$f^*(x, v) = f(x, u)$$

besteht.

§ 4. Identität der Übertragungsparameter und der Krümmungstensoren.

Die Fälle A) und B). Aus den Definitionsgleichungen (2.2) der dualen Räume kann nach einer leichten Rechnung gefolgert werden, daß die Übertragungsparameter und die Krümmungstensoren der dualen Räume in einander entsprechenden Grundelementen identisch sind. Aus (2.3) bzw. (2.5) folgt nämlich:

$$\text{(4.1a)}\quad \frac{\partial u_i}{\partial x^k}=(q-p)\frac{\partial \log \sqrt{g^*}}{\partial x^k}u_i^*, \qquad \text{(4.1b)}\quad \frac{\partial v^i}{\partial x^k}=(q-s)\frac{\partial \log \sqrt{g^*}}{\partial x^k}v^{*i}.$$

Sind nun $f(x, u)$ und $f^*(x, u^*)$ zwei Größen, für die die Relation

$$f(x, u)=f^*(x, u^*)$$

besteht, und betrachten wir x^i, u_i^* als unabhängige Veränderlichen, so folgt, wenn f in den u_i bzw. f^* in den u_i^* homogen von nullter Dimension ist, daß

$$\text{(4.2)}\qquad \frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f^*}{\partial x^i}$$

besteht. Nach (4.1a) besteht nämlich auf Grund der Eulerschen Relation über homogene Funktionen:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}=0.$$

In entsprechender Weise folgt die Gleichung (4.2) auch im Fall der kontravarianten Vektordichte als Grundelement.

Aus den Gleichungen (4.1) und (3.19) *folgt* nun *die Identität der Übertragungsparameter und der Krümmungstensoren.*

In dem Falle *C)*, wo es sich also um die Dualität eines Raumes mit kovarianter Vektordichte zu einem mit kontravarianter Vektordichte handelt, werden wir die Identität der Grundgrößen mit Hilfe der „oskulierenden Räume" durchführen können. In den nächsten Paragraphen konstruieren wir deshalb den oskulierenden Raum; wir werden aber keine Einschränkungen über den Torsionsvektor A^i machen. Im folgenden werden wir schon die Bedingung $A^i=0$ fallen lassen und somit wieder den allgemeinsten Fall untersuchen.

§ 5. Der oskulierende Riemannsche Raum.

(a) Räume mit kovarianter Vektordichte als Grundelement. Bevor wir den oskulierenden Riemannschen Raum eines allgemeinen metrischen Raumes $\mathfrak{R}_n$ mit kovarianter Vektordichte als Grundelement konstruieren, werden wir die Formel des Übertragungsparameters, also (1.11a) etwas umformen. Überschieben wir (1.11a) mit l_j, beachten wir die Gleichungen (1.9a), (1.12)

und (1. 14a), so erhalten wir für die Übertragungsparameter die Formel:

(5. 1) $$\Gamma^*_{ijk} = \gamma_{ijk} + A_{ij}^{\ \ m} \Gamma^*_{mok} + A_{jk}^{\ \ m} \Gamma^*_{moi} - A_{ik}^{\ \ m} \Gamma^*_{moj},$$

die man noch in der Form

(5. 2) $$\Gamma^*_{ijk} = \gamma_{ijk} + A_{ij}^{\ \ m} \Gamma_{mok} + A_{jk}^{\ \ m} \Gamma_{moi} - A_{ik}^{\ \ m} \Gamma_{moj}$$

schreiben kann, wo für Γ_{iok} die Relation

$$\Gamma_{iok} = \Gamma^*_{iok} - A_{oi}^{\ \ m} \Gamma_{mok} = \Gamma^*_{iok} - p l_i A^m \Gamma_{mok}$$

besteht. (5. 2) stimmt dann mit der Gleichung (3. 9) (a) von [6], S. 246 überein.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes über[7]). Es sei eine Folge der Grundelemente

(5. 3*) $$x^i = x^i(t),$$

(5. 3**) $$u_i = u_i(t),$$

die wir Grundfolge nennen wollen, angegeben, wo die auftretenden Funktionen im folgenden immer hinreichend oft stetig differenzierbar seien. Durch jedes Element von (5. 3) legen wir nun eine Hyperfläche hindurch in der Weise, daß diese Schar von Hyperflächen einen n-dimensionalen Teilbereich $\mathfrak{B}$ um (5. 3) schlicht bedecke. Dabei betrachten wir die Hyperfläche als den Ort ihrer Grundelemente. (Vgl. [6] S. 252.)

Ist nämlich eine Hyperfläche in parametrischer Form durch

$$x^i = x^i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1})$$

angegeben, so kann man in jedem ihrer Punkte die Größen

$$p_i(\sigma) = (-1)^{i+1} \operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \sigma^k} \right|, \quad \begin{pmatrix} r = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Die $p_i(\sigma)$ bilden eine kovariante Vektordichte vom Gewicht -1. Diejenigen (x^i, u_i), für die das Verhältnis der u_i mit dem der p_i übereinstimmt, werden wir als das dem (x_i, p_i) zugeordnete Grundelement bezeichnen. Somit erhalten wir unsere Hyperfläche in der Form:

$$x^i = x^i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}), \quad u_i = \varrho(x) u_i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}).$$

Nach unserer vorigen Konstruktion haben wir erreicht, daß in $\mathfrak{B}$ zu jedem Punkt x^i eindeutig ein Grundelement $u_i(x)$ zugeordnet ist, nämlich dasjenige Grundelement, das von der durch den Punkt x^i hindurchgehende Hyperfläche unserer Schar bestimmt wird. In den Punkten der Kurve (5. 3*) sind diese Grundelemente nach der Konstruktion offenbar eben die durch (5. 3**) angegebenen u_i. Offenbar gilt für die in den Punkten der Kurve

[7]) Die oskulierenden Riemannschen Räume sind in Spezialfällen in den Arbeiten [13] und [16] untersucht worden. In [13] ist $p = 1$ bzw. in [16] $q = 0$.

(5. 3*) definierten (5. 3**)

$$u_i(t) \equiv u_i(x(t)).$$

Führen wir jetzt die $u_i(x)$ in den metrischen Grundtensor ein, so bekommen wir einen eindeutig bestimmten Tensor

$$\gamma_{ik}(x) \equiv g_{ik}(x, p(x)) \equiv g_{ik}(x, u(x)), \tag{5.4}$$

der allein von den x^i abhängig ist, also einen Riemannschen Raum darstellt. Diesen Raum wollen wir den oskulierenden Riemannschen Raum in $\mathfrak{B}$ bezeichnen.

Wir wollen jetzt eine Annahme über unsere Schar von Hyperflächen machen. Wir wählen einen Punkt $\bar{x}^i$ aus $\mathfrak{B}$, und einen Punkt $x^i(t)$ aus (5. 3*) so, daß

$$|\bar{x}^i - x^i(t)| < \varepsilon \qquad (t\text{: fest}) \tag{5.5}$$

bestehe, wo ε eine beliebig vorgegebene Größe ist. Der Einheitsvektor, der die Richtung von $u_i(x)$ hat, ist $l_i(x)$. Unsere Annahme lautet nun:

F). Der Vektor $l_i(x)$ soll im oskulierenden Riemannschen Raum in den beiden Punkten $\bar{x}^i$ und $x^i(t)$ parallel sein, wenn Größen höherer als erster Ordnung in ε vernachlässigt werden.

Die anschauliche Bedeutung dieser Annahme betreffs des Vektors $l_i(x)$ ist die folgende: liegen die Mittelpunkte x^i der Grundelemente $u_i(x)$ in einer schmalen Umgebung von (5. 3*), so sind die zu diesen Grundelementen gehörigen Einheitsvektoren im oskulierenden Riemannschen Raum in erster Annäherung parallel.

Wir geben jetzt die analytische Formulierung unserer Annahme. Wir legen durch die Punkte $\bar{x}^i$ und $x^i(t)$ die Kurve

$$\begin{gathered} x^i = x^i(t) + \sigma(\bar{x}^i - x^i(t)), \\ 0 \leqq \sigma \leqq 1. \end{gathered} \qquad (t\text{: fest}) \tag{5.6}$$

Offenbar besteht für die Punkte von (5. 6) die Ungleichung (5. 5). Nach unserer Bedingung soll l_i längs (5. 6) in dem durch (5. 4) bestimmten Riemannschen Raum parallel sein. Das ergibt die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,k}^{m} l_m\right) \frac{dx^k}{d\sigma} = 0,$$

wo $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,k}^{m}(x)$ die aus den γ_{ik} gebildeten Christoffelklammern bedeuten. In Hinsicht auf (5. 6) bekommt man

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,k}^{m} l_m\right)(\bar{x}^k - x^k(t)) = 0. \tag{5.7}$$

Die Größen l_m, $\dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}$, $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,k}^{m}$ sollen in (5. 7) alle längs der Kurve (5. 6) gebildet werden. Verwenden wir jetzt den Mittelwertsatz der Differentialrechnung[8]) auf die Größen l_m, $\frac{\partial l_i}{\partial x^k}$ und $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k}$, und vernachlässigen wir die Glieder in ε höherer Ordnung, so bekommen wir eine Gleichung von der Form (5. 7), in der aber die genannten Größen längs $x^i(t)$ (t fest) zu bilden sind. Wegen der Willkürlichkeit des Punktes $\bar{x}^i$ bekommt man aus (5. 7):

$$\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k} l_m = 0. \tag{5. 8}$$

Diese Gleichung besteht also nach unserer Forderung längs (5. 3*). Die Gleichung (5. 8) können wir noch nach der Relation (1. 5a) in der Form

$$\frac{\partial u_s}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{sok} - f_k u_s, \qquad \left(f_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \log \frac{\sqrt{g^p}}{L}\right) \tag{5. 9}$$

angeben. Das Glied $f_k u_s$ wird im folgenden keine Bedeutung haben, da der Ausdruck $\frac{\partial u_s}{\partial x^k}$ immer in Relationen von der Form

$$\frac{\partial T}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x^k}$$

auftreten wird, wo $T(x, u)$ in den u_i homogen von nullter Dimension ist. Nach der Eulerschen Relation über homogene Funktionen ist aber

$$\frac{\partial T}{\partial u_s} u_s = 0.$$

Bilden wir jetzt die Christoffelklammer aus dem Tensor (5. 4). Es wird:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk} = \gamma_{ijk} + \frac{\sqrt{g^p}}{L}\left(A_{ij}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} + A_{jk}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^i} - A_{ik}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^j}\right), \tag{5. 10}$$

wo

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$$

ist. Dabei haben wir die aus (1. 6a) folgende Formel

$$A_{ij}{}^s = \frac{1}{2} g_{ij}\|^s$$

benützt. Nach (1. 9a) und (5. 10) wird:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{sok} = \gamma_{sok} + \frac{\sqrt{g^p}}{L}\left(p\, l_s A^r \frac{\partial u_r}{\partial x^k} + p\, l_k A^r \frac{\partial u_r}{\partial x^s} - A_{sk}{}^r \frac{\partial u_r}{\partial x^j} l^j\right). \tag{5. 11}$$

---

[8]) Aus $l_m(x(\sigma))$ wird z. B.:

$$l_m = l_m(x(t)) + \sigma(\bar{x}^j - x^j(t)) \frac{\partial l_m}{\partial x^j},$$

wo die Argumente von $\frac{\partial l_m}{\partial x^j}$ sind:

$$x^i(t) + \vartheta\, \sigma(\bar{x}^i - x^i(t)) \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Nach (5. 9) und (5. 11) wird:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x^j} l^j = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \gamma_{roo} + p A^t \frac{\partial u_t}{\partial x^r} - f_0 u_r. \tag{5. 12}$$

Aus der aus (1. 12) folgenden Relation

$$A^t A_{tr}{}^m = \frac{1}{p}\left(H_r^m - \delta_r^m\right)$$

folgt wegen (5. 9), (5. 11) und (5. 12) nach Überschiebung mit A^s:

$$A^m \frac{\partial u_m}{\partial x^t}(H_r^t - p l_r A^t) = \frac{L}{\sqrt{g^p}}\left[A^t \gamma_{tor} - \frac{1}{p}(H_r^m - \delta_r^m)\gamma_{moo}\right]. \tag{5. 13}$$

Wir bemerken jetzt, daß man im Falle $p = 0$ (5. 12) unmittelbar in die Gleichung (5. 11) einsetzen kann, was wegen (5. 2)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{sok} = \Gamma^*_{sok} \tag{5. 14}$$

ergibt.

Diese Gleichung werden wir aber auch im allgemeinen Fall, also für $p \neq 0$ herleiten. Überschieben wir die Gleichung (5. 13) mit

$$K_s^r(\delta_i^s + p l_i A^s),$$

so wird man nach (1. 13) und nach der Relation

$$K_s^o = l_s \tag{5. 15}$$

(vgl. etwa [5] S. 296; nach (1. 12) und (1. 13) kann man aber die Relation (5. 15) sofort verifizieren), die Gleichung

$$A^m \frac{\partial u_m}{\partial x^i} = \frac{L}{\sqrt{g^p}}\left\{K_i^r\left[A^t \gamma_{tor} - \frac{1}{p}(H_r^m - \delta_r^m)\gamma_{moo}\right] + l_i[\cdots]\right\} \tag{5. 16}$$

erhalten, wo $[\cdots]$ solche Glieder bedeutet, die im folgenden ausfallen werden. Nach (5. 9) und (5. 11) wird die Gleichung

$$A_{ij}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} = A_{ij}{}^s\left(\frac{L}{\sqrt{g^p}}\gamma_{sok} + p l_k A^r \frac{\partial u_r}{\partial x^s} - A_{sk}{}^r \frac{\partial u_r}{\partial x^t} l^t\right)$$

bestehen. Setzen wir in diese Gleichung die Werte aus (5. 12) und (5. 16) ein, so erhalten wir nach einigen leichten Umformungen:

$$A_{ij}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g^p}} A_{ij}{}^s \Gamma^{*}{}_{s}{}^{o}{}_{k}.$$

Setzen wir diese Werte in (5. 10) ein, so erhalten wir unmittelbar die wichtige Relation:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x) = \Gamma^*_{ijk}(x, u), \tag{5. 17}$$

die längs der Grundelementfolge (5. 3) besteht.

Wir können diese Resultate im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz III. *Längs der Folge von Grundelementen stimmen die Übertragungsparameter des oskulierenden Riemannschen Raumes und die des allgemeinen Raumes $\mathfrak{R}_n$ überein.*

Bemerkung. Aus (5. 17) folgt sofort die Gleichung (5. 14); aber es gilt auch, daß aus (5. 14) nach (5. 9) und (5. 10) die Relation (5. 17) folgt.

Nach (5. 17) können wir die Gleichung (5. 9) in der Form

$$\frac{\partial u_s}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \Gamma^{*o}_{s\ k} - f_k u_s \tag{5. 18}$$

schreiben. Mit Hilfe dieser Gleichung können wir sofort den folgenden Satz beweisen:

Satz IV. *Längs der Folge von Grundelementen stimmt das invariante Differential eines Vektors ξ^i im oskulierenden Raum mit dem des Vektors ξ^i im allgemeinen Raum $\mathfrak{R}_n$ überein.*

Beweis. Das invariante Differential von ξ^i im oskulierenden Riemannschen Raum lautet:

$$\overset{(\varrho)}{D}\xi^j = d\xi^j + \overset{(\varrho)}{\Gamma^j_{i\,k}}\xi^i dx^k. \tag{5. 19}$$

Längs (5. 3) ist nun

$$\frac{\partial u_s}{\partial x^k} dx^k = du_s,$$

somit wird nach (5. 10) und (5. 18)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma^j_{i\,k}} dx^k = C_i^{js} du_s + \Gamma^j_{i\,k} dx^k, \tag{5. 20}$$

wo

$$\Gamma^j_{i\,k} = \Gamma^{*j}_{i\ k} - A_i^{js}\Gamma^*_{sok} = \Gamma^{*j}_{i\cdot k} - A_i^{js}\Gamma_{sok}, \qquad C_i^{js} = \frac{\sqrt{g^p}}{L} A_i^{js}$$

bedeuten. Setzen wir nun (5. 20) in (5. 19) ein, so bekommen wir eben den Satz IV. (Vgl. etwa [6] S. 246.)

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß man mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes das invariante Differential in diesen allgemeinen Räumen ebenso einführen könnte, wie im Finslerschen Raum das von Herrn O. Varga durchgeführt wurde (vgl. [16]. Für den Cartanschen Raum vgl. [13]).

* * *

(b) Räume mit kontravarianter Vektordichte als Grundelement. In diesen Räumen können wir bei der Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes in ungefähr analoger Weise verfahren wie vorher, doch werden wir der Vollständigkeit halber die Konstruktion auch jetzt durchführen; wir wollen aber in erster Linie diejenigen Überlegungen ausführen, die von dem vorigen Fall abweichen.

(1. 11b) können wir in die Form:

(5. 21) $$\Gamma^*_{ijk} = \gamma_{ijk} - A_{ij}{}^m \Gamma^*_{omk} - A_{jk}{}^m \Gamma^*_{omi} + A_{ik}{}^m \Gamma^*_{omj}$$

umwandeln.

Es sei nun eine stetige Folge

(5. 22*) $$x^i = x^i(t),$$

(5. 22**) $$v^i = v^i(t)$$

der Grundelemente, die Grundfolge angegeben. Durch jedes Element von (5. 22) legen wir eine Kurve hindurch, und wir betten die Kurven in eine Kurvenschar ein, so daß diese Kurvenschar einen n-dimensionalen Punktbereich $\mathfrak{B}$ um (5. 22*) schlicht bedecke.

Gegenüber der vorigen Konstruktion benützen wir hier statt der Hyperflächenschar Kurvenscharen, da zu den Punkten einer Kurve

$$x^i = x^i(s)$$

ein kontravarianter Vektor in natürlicher Weise zugeordnet ist; nämlich der Tangentenvektor

$$x'^i = \frac{dx^i}{ds}.$$

Der Tangentenvektor in einem Punkt bestimmt aber eindeutig im Raum $\mathfrak{R}_n$ ein Grundelement

$$v^i = v^i(s),$$

wo das Verhältnis der v^i mit dem der x'^i übereinstimmt. Somit erhalten wir für eine Kurve unserer Kurvenschar die Darstellung

$$x^i = x^i(s), \qquad v^i = v^i(s).$$

Zu jedem Punkt x^i in $\mathfrak{B}$ ist also eine kontravariante Vektordichte $v^i(x)$ zugeordnet, nämlich dasjenige Grundelement, das durch diejenige Kurve bestimmt wird, die eben durch x^i passiert. Längs (5. 22*) gilt natürlich

$$v^i(t) \equiv v^i(x(t)).$$

Führen wir jetzt die $v^i(x)$ in den metrischen Grundtensor ein, so erhalten wir den Tensor

(5. 23) $$\gamma_{ik}(x) \equiv g_{ik}(x, v(x)),$$

der den metrischen Grundtensor des oskulierenden Riemannschen Raumes darstellt.

Wir stellen auch in diesem Falle über den Einheitsvektor $l^i(x)$, der die Richtung seines Stützelementes hat, die folgende Forderung:

F′) Wenn $\bar{x}^i$ aus $\mathfrak{B}$ und $x^i(t)$ aus (5. 22*) *gewählte Punkte sind, für die*

$$|\bar{x}^i - x^i(t)| < \varepsilon \qquad (t\ fest)$$

besteht, dann soll $l^i(x)$ im oskulierenden Raum in den beiden Punkten $\bar{x}^i$ und

$x^i(t)$ parallel sein, wenn Größen höherer als erster Ordnung in ε vernachlässigt werden. Damit haben wir die konstruierte Kurvenschar spezialisiert.

Aus dieser Bedingung können wir leicht die der Gleichung (5.8) entsprechende Relation ableiten. (Vgl. [16], insb. die Herleitung der Gleichung (2, 18) auf Seite 172.) Es wird:

$$\frac{\partial l^s}{\partial x^k} + \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^s_{m\,k} l^m = 0, \tag{5.24}$$

das man nach (1.5b) auch in der Form:

$$\frac{\partial v^s}{\partial x^k} = -L\sqrt{g^q}\,\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^s_{m\,k} l^m + f_k v^s \qquad \left(f_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\log L\sqrt{g^q}\right) \tag{5.25}$$

schreiben kann.

Die Christoffelklammer, gebildet aus dem Tensor (5.23) ist:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk} = \gamma_{ijk} + \frac{1}{L\sqrt{g^q}}\left(A_{ijs}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} + A_{jks}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} - A_{iks}\frac{\partial v^s}{\partial x^j}\right). \tag{5.26}$$

Aus den Gleichungen (5.25) und (5.26) erhalten wir in Hinsicht auf (1.9b)

$$\frac{\partial v^r}{\partial x^k} l^k(\delta^s_r + 2q\,l^s A_r) = -L\sqrt{g^q}\,\gamma^s_{o\,o} + q A_r \frac{\partial v^r}{\partial x^j} g^{js} + f_o v^s.$$

Überschieben wir diese Gleichung mit

$$(\delta^t_s - 2q\,l^t A_s),$$

so wird

$$\frac{\partial v^t}{\partial x^k} l^k = -L\sqrt{g^q}\,\gamma^t_{o\,o} + q A_r \frac{\partial v^r}{\partial x^j} g^{jt} + l^t[\cdots] + f_o v^t. \tag{5.27}$$

Aus (5.25) und (5.26) bekommt man noch wegen

$$A_s A^s_{k\,r} = \frac{1}{q}(H_{kr} - g_{kr}), \qquad H_{or} = l_r$$

nach Verwendung von (1.13)

$$A_m \frac{\partial v^m}{\partial x^t} = -L\sqrt{g^q}\,K^k_t\left[A_s\gamma^s_{o\,k} + \frac{1}{q}(g_{kr} - H_{kr})\gamma^r_{o\,o}\right] + l_t[\cdots]. \tag{5.28}$$

B e m e r k u n g. In unseren Betrachtungen können wir immer $q \neq 0$ bedingen, da der Fall $q = 0$ in [16] schon vollständig entwickelt ist.

Wir können jetzt die in (5.26) auftretenden Größen

$$A_{ijs}\frac{\partial v^s}{\partial x^k}$$

berechnen. Nach (5.25), (5.27) und (5.28) wird

$$A_{ijs}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} = -L\sqrt{g^q}\,A_{ij}{}^s\,\Gamma^*_{osk}. \tag{5.29}$$

(Bei der Herleitung von (5. 29) haben wir noch zur Vergleichung

$$A_{ij}^{\cdot\cdot s}\Gamma^{*}_{osk} \tag{5. 30}$$

aus (1. 11b) berechnet.) Nach (5. 26) und (5. 29) folgt in Hinsicht auf (5. 21), daß längs der Grundelementfolge (5. 22)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x)=\Gamma^{*}_{ijk}(x,v) \tag{5. 31}$$

besteht. *Damit haben wir die Gültigkeit des Satzes III auch im Fall der kontravarianten Vektordichte bewiesen.*

Benützen wir nun die längs (5. 22*) gültige Relation

$$\frac{\partial v^s}{\partial x^k}dx^k=dv^s,$$

so kann man auch in diesem Falle den Satz IV beweisen. Aus (5. 19) und (5. 26) bekommt man nämlich

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^{j}_{ik}dx^k=C^{j}_{is}dv^s+\Gamma^{j}_{ik}dx^k, \tag{5. 32}$$

wo

$$\Gamma^{j}_{ik}=\Gamma^{*j}_{i\ k}+A^{j}_{is}\Gamma^{*s}_{o\ k},\qquad C^{j}_{is}=\frac{1}{L\sqrt{g^{q}}}A^{j}_{is}$$

bedeuten. Setzen wir (5. 32) in (5. 19) ein, *so bekommen wir eben den Satz IV im kontravarianten Fall.* (Vgl. [6] S. 246.)

B e m e r k u n g. Offenbar ist

$$\Gamma^{s}_{ok}=\Gamma^{*s}_{o\ k}+q\,l^s A_r\Gamma^{*r}_{o\ k},$$

und wegen $A^{j}_{io}=0$ können wir noch für $\Gamma^{*j}_{i\ k}$ die Relation

$$\Gamma^{*j}_{i\ k}=\Gamma^{j}_{ik}-A^{j}_{is}\Gamma^{s}_{ok}$$

aufschreiben, die mit der von E. T. DAVIES angegebenen Formel vollständig übereinstimmt. (Vgl. [6] Gleichung (3. 9b).)

* * *

Geometrische Bedeutung der Annahme bezüglich $l^i(x)$. Die Annahme, die wir für den Einheitsvektor $l^i(x)$ in beiden Fällen vorausgesetzt haben, ist analytisch durch (5. 8) bzw. (5. 24) angegeben. Überschieben wir diese Gleichungen mit dx^k, so folgt, daß längs der Grundfolgen das invariante Differential des Vektors $l^i(x)$ im oskulierenden Riemannschen Raum verschwindet. Nach dem Satz IV verschwindet aber dann das invariante Differential von $l^i(x,u)$ längs der Grundfolge der Grundelemente auch im allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$.

Das bedeutet aber, daß die einzelnen Hyperflächen bzw. die einzelnen Kurven der Scharen, mit denen wir den oskulierenden Riemannschen Raum konstruiert haben, mindestens längs der Grundfolgen „autoparallel“ sein sollen.

Autoparallele Hyperflächen, oder Hyperebenen, existieren nicht in jedem $\mathfrak{R}_n$. Für die Existenz solcher Gebilde hat L. BERWALD im Cartanschen Raum ($p=1$) die Bedingung

$$\tilde{R}_{o\,jk}^{\;i}=0 \tag{5. 33}$$

abgeleitet (vgl. [1] S. 235—236). Autoparallele Kurven existieren dagegen immer in den Räumen $\mathfrak{R}_n$ und sind im Falle

$$A_{ooi}=0$$

mit den Extremalkurven identisch (vgl. [6] S. 257—258 und [9] S. 77).

Wir betonen aber, daß die einzelnen Elemente der Scharen nicht in allen ihren Punkten geodätisch zu sein brauchen. Vgl. noch dazu die Fußnote[10]) in [16] auf Seite 170. Nach dieser Bemerkung genügt also zur Möglichkeit der Konstruktion, daß die Flächen- bzw. Kurvenschar längs der Grundfolge eine Schar der autoparallelen Flächen bzw. Kurven oskuliere, d. h. daß unsere Konstruktion auch in Räumen gültig ist, für die (5. 33) nicht besteht.

§ 6. Identität der Übertragungsparameter und Krümmungstensoren der dualen Räume mit kontravarianter bzw. kovarianter Vektordichten als Grundelement.

Bedeute jetzt wieder $\mathfrak{R}_n^*$ einen allgemeinen metrischen Raum mit kontravarianter Vektordichte, $\mathfrak{R}_n$ einen solchen mit kovarianter Vektordichte als Grundelement. Nach den Resultaten von § 3 muß also für die Dualisierbarkeit von $\mathfrak{R}_n^*$ und $\mathfrak{R}_n$ entweder der Torsionsvektor A^i verschwinden, oder $p=q$ sein. Die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ sind einander durch (2. 6) und (2. 7) zugeordnet.

Es sei eine Grundfolge

$$x^i=x^i(t), \quad v^i=v^i(t)$$

in $\mathfrak{R}_n^*$ angegeben, zu der wir mit der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode den oskulierenden Riemannschen Raum konstruieren. In einem Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{R}_n^*$ ist dann

$$v^i=v^i(x) \tag{6. 1*}$$

und nach (2. 6) wird auch

$$u_i=u_i(x) \tag{6. 1}$$

bestehen. Aus (2. 2) hat man noch die Identität:

$$g_{ij}(x,u(x))=g_{ij}^*(x,v(x))=\gamma_{ij}(x), \tag{6. 2}$$

wo $\gamma_{ij}(x)$ den metrischen Fundamentaltensor des oskulierenden Riemannschen Raumes bezeichnet; (6. 2) bedeutet nach (6. 1), daß zu dem oskulierenden Raum von $\mathfrak{R}_n^*$ automatisch ein Riemannscher Raum zugeordnet ist, von dem wir sogleich nachweisen, daß er ein oskulierender Riemannscher Raum von $\mathfrak{R}_n$ ist. Dazu müßen wir nun zeigen, daß die Forderung F), die sich analytisch durch (5. 8) ausdrückt, für $\mathfrak{R}_n$ gültig ist.

Zufolge der Gleichungen (2. 6), (3. 12), (6. 1*) und (5. 24) wird aber der zu (6. 1) gehörige Einheitsvektor $l_i(x)$ die Gleichungen (5. 8) längs der Grundfolge befriedigen. Daraus folgt nun, daß der zuvor erwähnte Riemannsche Raum ein oskulierender Raum ist.

Die Gleichungen (5. 8) und) (5. 24) sind übrigens tensorielle Relationen, und sie drücken aus, daß das kovariante Differential des Vektors l^i im oskulierenden Riemannschen Raum längs der Grundfolge verschwindet.

Nach Satz III ist aber längs der Grundfolge

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x) = \Gamma^*_{ijk}(x, v(x)) = \hat{\Gamma}^*_{ijk}(x, u(x)), \tag{6. 3}$$

wo wir mit $\hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k$ den Übertragungsparameter von $\mathfrak{R}_n$ bezeichnet haben. Zu jedem dualen Elementenpaar

$$(x, v), \quad (x, u)$$

der Räume $\mathfrak{R}_n^*$ und $\mathfrak{R}_n$ kann man aber einen gemeinsamen oskulierenden Riemannschen Raum konstruieren. Dann folgt aus (6. 3)

$$\Gamma^*_{ijk}(x, v) = \hat{\Gamma}^*_{ijk}(x, u); \tag{6. 4}$$

diese Gleichung drückt aus, daß *die Übertragungsparameter der dualen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ übereinstimmen.*

Aus (6. 2) und (6. 4) folgt selbstverständlich auch

$$\Gamma_i{}^{*j}{}_k(x, v) = \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k(x, u). \tag{6. 5}$$

Wir beweisen jetzt die Identität der Krümmungstensoren (1. 15a) und (1. 15b). Nach (3. 20) und (6. 5) folgt:

$$\frac{\partial \Gamma_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} - \Gamma_i{}^{*j}{}_k\|_r \Gamma_o{}^{*r}{}_m = \frac{\partial \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k}{\partial u_t}\frac{\partial u_t}{\partial x^m} - g_{rt}\hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k\|^t \Gamma_o{}^{*r}{}_m; \tag{6. 6}$$

dabei haben wir x^i, v^i als unabhängige Veränderlichen betrachtet, während u_i von x^i, v^i gemäß (2. 6) abhängt. Die Gleichung (2. 6) schreiben wir nun in der Form:

$$u_t = (\sqrt{g^*})^{-p-q} g_{rt}(x, u)\, v^r. \tag{6. 7}$$

Wegen (3. 12) und

$$\frac{\partial g_{rt}}{\partial u_s} v^r = 2(\sqrt{g})^{p+q} A_{rt}{}^s l^r = 2p(\sqrt{g})^{p+q} l_t A^s$$

bekommt man aus (6. 7)

$$\frac{\partial u_t}{\partial x^m} = u_t \varphi_m(x, u, v) + \frac{L}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial g_{rt}}{\partial x^m} l^r, \tag{6. 8}$$

wo $\varphi_m(x, u, v)$ eine Funktion der Argumente x, u, v bedeutet, die man aus (6. 7) leicht explizit bestimmen könnte, die aber für die folgenden unwesentlich ist. Setzen wir (6. 8) in (6. 6) ein, so wird wegen der Homogenität nullter Dimension der $\hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k$ in den u_t die Relation

$$\frac{\partial \Gamma_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} - \Gamma_i{}^{*j}{}_k\|_r \Gamma_o{}^{*r}{}_m = \frac{\partial \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} + \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k\|^t \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^m} l^r - \hat{\Gamma}^*_{otm} \right) \tag{6. 9}$$

bestehen. Nach (5. 1) wird wegen der Identität (1. 9a)

$$\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^m} l^r - \hat{\Gamma}^*_{otm} = \hat{\Gamma}^*_{tom} - 2 p l_t A^r \hat{\Gamma}_{rom}.$$

Setzen wir das in (6. 9) ein, so wird in Hinsicht auf die Homogenität von nullter Dimension der $\hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k$ in den u_t:

$$\frac{\partial \Gamma^{*j}_{i\ k}}{\partial x^m} - \Gamma^{*j}_{i\ k}\|_r \Gamma^{*r}_{o\ m} = \frac{\partial \hat{\Gamma}^{*j}_{i\ k}}{\partial x^m} + \Gamma^{*j}_{i\ k}\|^t \Gamma^*_{tom}. \tag{6. 10}$$

Aus den Relationen (6. 5) *und* (6. 10) *folgt die Identität der Krümmungstensoren der dualen Räume.*

Aus der Relation (6. 5) kann noch eine weitere fundamentale Identität bewiesen werden. Wenn für ein Vektorpaar $\xi^i, \hat{\xi}^i$ die Gleichung

$$\xi^i(x, v) = \hat{\xi}^i(x, u)$$

in den einander entsprechenden Elementen besteht, dann folgt:

$$\xi^i(x, v)|_k = \hat{\xi}^i(x, u)|_k. \tag{6. 11}$$

Der Beweis kann analog zur Rechnung geführt werden, die aus (6. 5) zur Gleichung (6. 10) führte. Statt $\Gamma^{*j}_{i\ k}$ steht hier ξ^i.

Wir können also unsere Resultate über die dualen Räume im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz V. *Die Grundgrößen der dualen allgemeinen Räume stimmen in den einander entsprechenden Grundelementen überein. Die Grundoperationen*[9]) *ergeben aus übereinstimmenden Größen wieder übereinstimmende Größen.*

Sind die Räume $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}^*_n$ dualisierbar, dann ist entweder $p = q$, oder es verschwindet identisch der Torsionsvektor A^i.

Aus dem letzten Teil dieses Satzes folgt, *daß die Räume $\mathfrak{R}_n$ mit kovarianter Vektordichte als Grundelement mit den Räumen $\mathfrak{R}^*_n$ mit kontravarianter*

---

9) Die Grundoperationen sind: 1) das invariante Differential, 2) die kovariante Ableitung und 3) die Operation $\|^k$ bzw. $\|_k$. Die Indentität der invarianten Differentiale der dualen Räume folgt unmittelbar aus Satz IV, da die oskulierenden Räume von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}^*_n$ gemeinsam sind.

Vektordichte als Grundelement gleichberechigt sind, falls das Gewicht der Grundelemente die Relation $p = q$ befriedigt.[10])

Zum Schluß bemerken wir noch, daß in den Räumen mit $A^i = 0$ ein Rauminhalt im gewöhnlichen Sinne existiert. Nach (1.7) ist nämlich g von u_i bzw. v^i unabhängig, somit ist

$$V = \int_{(n)} \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n \tag{6.12}$$

ein Maß des Rauminhalts. Ist $A^i \neq 0$, so kann man mit Hilfe der Formel (6.12) den Rauminhalt erst in bezug auf ein Feld

$$u_i = u_i(x), \text{ bzw. } v^i = v^i(x)$$

berechnen.

§ 7. Die Dualisierung eines allgemeinen Raumes.

In vorigem betrachteten wir immer zwei Räume $\mathfrak{R}_n^*$ und $\mathfrak{R}_n$, die wir als duale Räume bezeichneten, falls die metrischen Grundtensoren in einander entsprechenden Grundelementen übereinstimmten. Jetzt wollen wir zeigen, daß zu einem Raum $\mathfrak{R}_n^*$, dessen Grundelemente kontravariante Vektordichten sind, immer ein dualer Raum $\mathfrak{R}_n$ konstruiert werden kann, dessen Grundelemente kovariante Vektordichten sind.

Bedeutet $\mathfrak{R}_n^*$ mit der Grundfunktion $L^*(x, v)$ einen allgemeinen Raum, und ist das Gewicht der Grundelemente p, so gilt der

Satz VI. *Besitzt die Gleichung*

$$u_i = (g^*(x, v))^{-p} g^*_{ij}(x, v) v^j \tag{7.1}$$

mindestens eine, in den u_k von erster Ordnung homogene Lösung $v^k = v^k(x, u)$, so kann zu $\mathfrak{R}_n^*$ ein dualer $\mathfrak{R}_n$ konstruiert werden.[11])

Bemerkung. Die Gleichung (7.1) ist mit (2.6) identisch, falls in (2.6) $p = q$ gesetzt wird.

Beweis des Satzes VI. Bestimmt man v^k aus (7.1) in der Form $v^k = v^k(x, u)$ und substituiert man diese Werte in die Grundfunktion $L^*(x, v)$, so erhält man eine Funktion $L(x, u)$ und es wird

$$L^*(x, v) = L(x, u).$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach partieller Ableitung nach v^i in Hin-

---

[10]) Vgl. auch den Satz VI.

[11]) Die Forderung, daß $v^k(x, u)$ in den u_i von erster Ordnung homogen sei, ist keine einschränkende Bedingung. Ist nämlich $u_i = \varphi_i(v)$ ein Gleichungssystem, wo die φ_i homogen von erster Ordnung sind, und existiert die Lösung $v^k = \psi^k(u)$, so ist auch ψ^k wegen

$$\psi^k(\varrho u) = \psi^k(\varrho \varphi(v)) = \psi^k(\varphi(\varrho v)) = \varrho v^k = \varrho \psi^k(u)$$

eine homogene Funktion erster Ordnung.

sicht auf (7. 1)

$$\frac{\partial L^{*2}}{\partial v^i} = \frac{\partial L^2}{\partial u_r} g^{*-p} g^*_{ri}. \tag{7.2}$$

Offensichtlich kann (7. 2) nach (1.5b) in der Form:

$$\frac{\partial L^2}{\partial u_r} = 2\sqrt{g^{*p}}\, L^* l^{*r} \tag{7.3}$$

geschrieben werden. Nun folgt aus (7.2)

$$a^*_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^{*2}}{\partial v^i \partial v^k} = a^{rs} g^{*-2p} g^*_{ri} g^*_{sk} + \frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial u_r} \frac{\partial}{\partial v^k} (g^{*-p} g^*_{ri}).$$

Substituieren wir $\frac{\partial L^2}{\partial u_r}$ aus (7. 3), so wird nach (1. 6b), (1. 7b) und (1. 9b):

$$a^*_{ik} = a^{rs} g^{*-2p} g^*_{ri} g^*_{sk}, \tag{7.4}$$

mit

$$a^{rs} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_r \partial u_s}.$$

Nach der Multiplikationsregel der Determinanten wird aus (7. 4)

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} g^{*-2np+2}. \tag{7.5}$$

Nach (1. 2b), (7. 4) und (7. 5) erhält man

$$g^*_{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{p}{np-1}} a^{rs} g^*_{ri} g^*_{sk}.$$

Nach Überschiebung dieser Gleichung mit $g^{*ij} g^{*km}$ wird in Hinsicht auf (1. 2a)

$$g^{*jm}(x, v) = g^{jm}(x, u). \tag{7.6}$$

Betrachten wir also $L(x, u)$ für die Grundfunktion eines Raumes $\mathfrak{R}_n$, dann drückt die Relation (7. 6) aus, daß $\mathfrak{R}^*_n$ und $\mathfrak{R}_n$ duale Räume sind, w. z. b. w.

Schließlich bemerken wir noch, daß der Satz VI umkehrbar ist, d. h. *es läßt sich mit der angegebenen Methode auch zu einem $\mathfrak{R}_n$ ein dualer $\mathfrak{R}^*_n$ konstruieren.*

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.*, 71 (1939), 191—248.

[2] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. II, *Compositio Math.*, 7 (1940), 141—176.

[3] E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, *Actualités scientifiques et industrielles*, No 72 (Paris, Hermann et Cie., 1933), 47 Seiten.

[4] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, No 79 (Paris, Hermann et Cie., 1934), 42 Seiten.
[5] R. S. Clark, The conformal geometry of a general differential metric space, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **53** (1951), 294—309.
[6] E. T. Davies, On metric spaces based on a vector density, *Proc. London Math Soc.*, (2) **49** (1947), 241—259.
[7] A. Deicke, Über Finslerräume mit $A_i = 0$, *Archiv der Math.*, **4** (1953), 45—51.
[8] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, *Diss. Göttingen* (1918).
[9] J. G. Freeman, First and second variation of the length integral in a generalized metric space, *The Quarterly Journal of Math., Oxford Series*, **15** (1944), 70—83.
[10] J. I. Horváth—A. Moór, Entwicklung einer einheitlichen Feldtheorie begründet auf die Finslersche Geometrie, *Zeitschrift für Phys.*, **131** (1952), 544—570.
[11] A. Moór, Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen, *Acta Math.*, **88** (1952), 347—370.
[12] A. Moór, Ergänzung zu meiner Arbeit: „Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen“, *Acta Math.*, **91** (1954), 187—188.
[13] A. Moór, Die oskulierenden Riemannschen Räume regulärer Cartanscher Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 59—71.
[14] J. A. Schouten und J. Haantjes, Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **43** (1936), 161—176.
[15] A. L. Underhill, Invariants of the functions $F(x, y, x', y')$ in the calculus of variations, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 316—338.
[16] O. Varga, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1941), 165—175.

(Eingegangen am 16. Dezember 1954.)