Une généralisation du théorème de Simmons.

Par I. B. HAÁZ à Budapest.

La probabilité constante d'un événement soit p; la probabilité pour que cet événement se présente r fois et ne se présente pas $n-r$ fois en n épreuves est

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \qquad (q = 1-p).$$

Le théorème de T. C. SIMMONS [1] affirme que *si* $p < \frac{1}{2}$ *et si* np *est entier, il y a plus de chances que l'événement arrive moins de* np *fois que plus de* np *fois:*

$$\sum_{r=0}^{np-1} P_r > \sum_{r=np+1}^{n} P_r.$$

Dans le cas où np n'est pas entier, ce théorème n'est pas en général vrai (cf. CH. JORDAN [2]).

Au contraire, le théorème suivant est toujours vrai:

Théorème. *Si* $p < \frac{1}{2}$ *et si* h *est l'entier égal ou immédiatement supérieur à* np, *il y a plus de chances que l'événement arrive moins de* h *fois que plus de* h *fois:*

$$\sum_{r=0}^{h-1} P_r > \sum_{r=h+1}^{n} P_r \qquad \left(h = np + d \leqq \frac{n+1}{2},\ 0 \leqq d < 1\right).$$

Ce théorème embrasse évidemment le théorème de SIMMONS.

Pour le démontrer, examinons les rapports

$$R_i = \frac{P_{h-i}}{P_{h+i}} = \frac{h-i+1}{n-h-i+1} \cdots \frac{h-1}{n-h-1}\,\frac{h}{n-h}\,\frac{h+1}{n-h+1} \cdots \frac{h+i}{n-h+i}\left(\frac{q}{p}\right)^{2i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k; \quad k = \min\,(h, n-h)).$$

Le premier de ces rapports est

$$R_1 = \frac{P_{h-1}}{P_{h+1}} = \frac{h}{n-h}\,\frac{h+1}{n-h+1}\,\frac{q^2}{p^2} = \frac{npq+dq}{npq-dp}\,\frac{npq+dq+q}{npq-dp+p} > 1.$$

Pour examiner les rapports $R_2, R_3, \ldots, R_k$, posons

$$S_i = \frac{R_i}{R_{i-1}} = \frac{h-i+1}{n-h-i+1}\,\frac{h+i}{n-h+i}\,\frac{q^2}{p^2} \qquad (i=2, 3, \ldots, k);$$

on a pour $i=3, 4, \ldots, k$:

$$S_i - S_{i-1} = \left(\frac{h-i+1}{n-h-i+1}\,\frac{h+i}{n-h+i} - \frac{h-i+2}{n-h-i+2}\,\frac{h+i-1}{n-h+i-1}\right)\frac{q^2}{p^2}.$$

On en tire que

$$\operatorname{sgn}(S_i - S_{i-1}) = \operatorname{sgn}\,[(h-i+1)(h+i)(n-h-i+2)(n-h+i-1)-$$
$$-(n-h-i+1)(n-h+i)(h-i+2)(h+i-1)] =$$
$$= \operatorname{sgn}\left[4(i-1)(n+1)\left(h-\frac{n}{2}\right)\right],$$

c'est-à-dire que

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{R_i}{R_{i-1}} - \frac{R_{i-1}}{R_{i-2}}\right) = \operatorname{sgn}\left(h-\frac{n}{2}\right).$$

Donc on a pour $i=3, 4, \ldots, k$:

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} \gtreqless \frac{R_{i-1}}{R_{i-2}} \quad \text{selon que} \quad h \gtreqless \frac{n}{2}.$$

Il y a trois cas à distinguer:

1. En cas où $h=\frac{n+1}{2}$, on a $h>\frac{n}{2}>n-h$, donc

$$\frac{R_k}{R_{k-1}} > \frac{R_{k-1}}{R_{k-2}} > \cdots > \frac{R_2}{R_1} = \frac{h-1}{n-h-1}\,\frac{h+2}{n-h+2}\,\frac{q^2}{p^2} > 1.$$

Comme $R_1>1$, il en résulte que

$$R_k > R_{k-1} > \cdots > R_2 > R_1 > 1.$$

En ce cas $k=n-h$, $h-k=1$, $h+k=n$, donc on a

$$\frac{P_1}{P_n} > \frac{P_2}{P_{n-1}} > \cdots > \frac{P_{h-2}}{P_{h+2}} > \frac{P_{h-1}}{P_{h+1}} > 1.$$

Par conséquent

$$P_{h-1} > P_{h+1},\ P_{h-2} > P_{h+2},\ \ldots, P_2 > P_{n-1},\ P_1 > P_n,$$

et évidemment $P_0>0$. L'addition de ces inégalités vérifie notre théorème dans le cas envisagé.

2. En cas où $h=\frac{n}{2}$, on a

$$\frac{R_k}{R_{k-1}} = \frac{R_{k-1}}{R_{k-2}} = \cdots = \frac{R_2}{R_1} = \frac{q^2}{p^2} > 1,$$

donc

$$R_k > R_{k-1} > \cdots > R_2 > R_1 > 1.$$

En ce cas $k = h = n-h$, $h-k=0$, $h+k=n$, donc

$$\frac{P_0}{P_n} > \frac{P_1}{P_{n-1}} > \cdots > \frac{P_{h-1}}{P_{h+1}} > 1,$$

c'est-à-dire

$$P_{h-1} > P_{h+1}, \quad P_{h-2} > P_{h+2}, \quad \ldots, \quad P_1 > P_{n-1}, \quad P_0 > P_n,$$

Par addition, notre théorème en résulte aussi dans le cas où $h = \frac{n}{2}$.

3. En cas où $h < \frac{n}{2} < n-h$, on a $k=h$ et

$$\frac{R_h}{R_{h-1}} < \frac{R_{h-1}}{R_{h-2}} < \cdots < \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous savons que $R_1 > 1$, mais il est possible qu'il y ait un $R_i \leqq 1$. Dans ce cas, soit j le plus petit des indices i pour lesquels cette inégalité subsiste, $1 < j \leqq h$. On a alors $R_j : R_{j-1} < 1$, et comme le rapport $R_i : R_{i-1}$ diminue lorsque i augmente, on a aussi $R_i : R_{i-1} < 1$ pour $i \geqq j$. Donc

$R_1 > 1, \ldots, R_{j-1} > 1$, $R_j \leqq 1$, $R_{j+1} < 1, \ldots$ et par conséquent

$$(*) \quad \begin{cases} P_{h-i} > P_{h+i} & (i = 1, 2, \ldots, j-1), \\ P_{h-i} \leqq P_{h+i} & (i = j, j+1, \ldots, n-h) \end{cases}$$

lorsqu'on convient de poser $P_i = 0$ pour $i < 0$. Les inégalités (*) restent valables aussi dans le cas où $R_i > 1$ pour tous les i, si l'on convient de poser dans ce cas $j = h+1$.

Dans la suite, nous pouvons procéder suivant la méthode de E. FELDHEIM [3]. Multiplions chacune des inégalités (*) par le facteur $j-i$, qui est positif pour $i = 1, \ldots, j=1$, égal à 0 pour $i = j$, et négatif pour $i = j+1, \ldots, n-h$. On obtient

$$(j-i) P_{h-i} \geqq (j-i) P_{h+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-h)$$

avec le signe $=$ seulement pour $i = j$. Par addition (omettant les probabilités égales à 0) il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{h} (j-i) P_{h-i} > \sum_{i=1}^{n-h} (j-i) P_{h-i},$$

donc

$$\sum_{r=0}^{h-1} (j-h+r) P_r > \sum_{r=h+1}^{n} (j-r+h) P_r.$$

La moyenne des écarts $np-r$ étant nulle, on a

$$\sum_{r=0}^{h-1}(np-r)P_r=\sum_{r=h}^{n}(r-np)P_r\geqq\sum_{r=h+1}^{n}(r-np)P_r.$$

En ajoutant cette inégalité à l'inégalité précédente, nous obtenons:

$$(np-h+j)\sum_{r=0}^{h=1}P_r>(j+h-np)\sum_{r=h+1}^{n}P_r.$$

Comme $h=np+d$,

$$(j-d)\sum_{r=0}^{h-1}P_r>(j+d)\sum_{r=h+1}^{n}P_r,$$

et à plus forte raison:

$$\sum_{r=0}^{h=1}P_r>\sum_{r=h+1}^{n}P_r,$$

ce qui achève la démonstration de notre théorème.[1])

Littérature.

[1] T. C. Simmons, A New Theorem of Probability, *Proceedings London Math. Soc.*, **26** (1894—95), 290—334.

[2] Ch. Jordan, Complément au théorème de Simmons sur les probabilités, *ces Acta*, **11** (1946—48), 19—27.

[3] E. Feldheim, Simmons valószínűségszámítási tételének új bizonyítása, és általánosítása, *Mat. és Fiz. Lapok*, 45 (1938), 99—113. Résumé en français, 113—114.

(*Reçu le 20 novembre 1955*)

[1]) Ce théorème a été présenté à l'"Académie Saint Étienne" de Budapest, en sa séance du 23 janvier 1948.