

Über endliche Gruppen, die nur einen echten Normalteiler besitzen.

Von J. SZÉP in Szeged.

In der Gruppentheorie, besonders in der Theorie der endlichen Gruppen, spielen die Untersuchungen, die aus der Einfachheit oder Nichteinfachheit der Gruppen auf ihre Struktur schließen, eine wichtige Rolle. Die Gruppen, die nur einen einzigen echten Normalteiler haben, stehen den einfachen Gruppen sehr nahe. Unsere Aufgabe ist die Untersuchung der Struktur dieser Gruppen, und wir werden sehen, daß diese Gruppen gut charakterisierbar sind. Neulich unternahm TAUNT [1] die Untersuchung der allgemeineren Gruppenklasse in der jede Gruppe eine einzige charakteristische Untergruppe besitzt.

Satz. *Es sei G eine endliche Gruppe. Der Normalteiler $N (\neq 1, G)$ von G ist der einzige Normalteiler in G dann und nur dann, wenn N kein direkter Faktor von G ist und einer der folgenden Fälle 1—3 statthat:*

- 1) $G = HN$ ($H \cap N = 1$), wobei H eine einfache Gruppe ist und
 - a) N ist einfach, oder
 - b) N ist eine nichteinfache elementare abelsche Gruppe und die einfachen Untergruppen von N sind konjugiert in G , oder
 - c) N ist das direkte Produkt von mindestens zwei einfachen Gruppen von zusammengesetzter Ordnung, die in G konjugiert sind;
- 2) N ist die Frattinische Untergruppe von G und zugleich eine elementare abelsche Gruppe, ferner sind die einfachen Untergruppen von N konjugiert in G , außerdem ist G/N einfach;
- 3) $G = HN$ ($H \cap N = D \neq 1$), wobei N das direkte Produkt von einfachen Untergruppen von zusammengesetzter Ordnung ist, die in G konjugiert sind, außerdem ist D die Frattinische Untergruppe von H mit einfacher Faktorgruppe H/D .

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß falls N der einzige Normalteiler von G ist, so G zu einem der oben erwähnten Typen gehört.

Es ist klar, daß N in G kein direkter Faktor ist. N besitzt offenbar keine charakteristische Untergruppe, also ist N das direkte Produkt isomorpher einfacher Gruppen: $N = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ ($r \geq 1$). (Vgl. ZASSENHAUS [2].)

Es ist klar, daß es in der Faktorisierung $N = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ ($r > 1$) (ist N eine elementare Abelsche Gruppe oder nicht) zu jedem beliebigen Paar E_i, E_k ($i \neq k$; $i, k = 1, \dots, r$) ein Element g in G zu finden ist, so, daß $gE_i g^{-1} = E_k$ besteht. Im entgegengesetzten Fall gäbe es nämlich eine echte Untergruppe in N , die Normalteiler in G ist. Das ist aber unmöglich.

Ist N keine elementare Abelsche Gruppe und hat G eine Untergruppe H mit der Eigenschaft $G = HN$ ($H \cap N = 1$), so ist klar, daß H ($\cong G/N$) eine einfache Gruppe sein muß.

Wenn N eine elementare Abelsche Gruppe ist, und es eine maximale Untergruppe M in G gibt so, daß $G = MN$ gilt, dann ist $M \cap N = 1$. Im Falle $M \cap N = D \neq 1$ wäre nämlich D Normalteiler in G , das der Tatsache, daß N einziger Normalteiler in G ist widerspricht (Fall 1) a, b). Wenn N in jeder maximalen Untergruppen von G enthalten ist, so fällt N offenbar mit der Frattinischen Untergruppe von G zusammen. Es ist auch klar, daß G/N einfach ist (Fall 2).

Ist N eine einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnung, oder ein direktes Produkt von Gruppen zusammengesetzter Ordnung, so kann N nicht die Frattinische Untergruppe von G sein, da die Frattinische Untergruppe einer endlichen Gruppe nilpotent ist. (S. FRATTINI [3]). Es sei H eine Untergruppe minimaler Ordnung in G , für die $HN = G$ ist. Sei $D = H \cap N$. Wir zeigen daß D die Frattinische Untergruppe von H ist. Bezeichne nämlich F die Frattinische Untergruppe von H . D kann keine echte Untergruppe von F sein, da dann $N \subset FN \subset G$ wäre; andererseits ist FN offenbar Normalteiler in G , womit wir zu einem Widerspruch gelangen sind. Jetzt zeigen wir $D = F$; im entgegengesetzten Fall ist D wegen der vorher gesagten nicht in F enthalten, also besitzt H eine maximale Untergruppe H' , die D nicht enthält. In diesem Fall ist aber $H = H'D$, also $G = H'N$, was der Minimumeigenschaft von H widerspricht. Die Gruppe H/D ist einfach, da es im entgegengesetzten Fall einen echten Normalteiler $H'(\supset D)$ in H gäbe und die Gruppe $H'N$ ein echter Normalteiler in G wäre, was ein Widerspruch ist. (So gehört G zum Fall 3.) Ist $G = HN$ ($H \cap N = 1$), so ist H offenbar einfach. (Dann gehört G zum Fall 1.)

Jetzt beweisen wir die Behauptung „dann“ des Satzes, d. h. wir zeigen, daß in den im Satze aufgezählten Fällen N der einzige Normalteiler ist.

Zuerst zeigen wir (das bezieht sich auf alle drei Fälle), daß N keine echte Untergruppe N' enthält, die Normalteiler in G ist. Ist N einfach, so ist die Behauptung klar. Nehmen wir an, daß N das direkte Produkt von ein-

fachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung ist: $N = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r$. Wir werden zeigen, daß wenn N' Normalteiler in N ist, dann N' eine der einfachen Gruppen E_1, E_2, \dots, E_r enthält, woraus sogleich folgt (da E_1, E_2, \dots, E_r zueinander konjugiert sind), daß N' kein Normalteiler in G sein kann. N' enthält offenbar ein Element der Gestalt $e_1 e_2 \dots e_r$ ($e_i \in E_i; i = 1, \dots, r; e_i \neq 1$). So enthält N' auch die Elemente $n_x = x e_1 x^{-1} e_2 \dots e_r$ und $n_y = y e_1^{-1} y^{-1} e_2^{-1} \dots e_r^{-1}$, wo x, y die Elemente von E_1 durchlaufen. Die Produkte $n_x n_y = x e_1 x^{-1} y e_1^{-1} y^{-1} (\in N')$ sind Elemente von E_1 . Die Gruppe, die durch diese Elemente (Produkte) erzeugt wird ist offenbar Normalteiler in E_1 , also ist sie E_1 gleich; womit wir unsere Behauptung bewiesen haben. Auch wenn N eine elementare Abelsche Gruppe ist ($N = P_1 \times \dots \times P_r; P_1, \dots, P_r$ Gruppen von Primzahlordnung), kann es in N keine echte Untergruppe geben, die Normalteiler in G ist. Nehmen wir nämlich an, daß $N' = P_1 \times \dots \times P_s$ (P_1, \dots, P_s Gruppen von Primzahlordnung, $s < r$) eine Untergruppe in N ist. N besitzt eine Faktorisierung $N = P_1 \times \dots \times P_s \times P_{s+1} \times \dots \times P_r$ (P_{s+1}, \dots, P_r Gruppen von Primzahlordnung). Nach der Annahme des Satzes gibt es ein Element g in G so, daß $g P_i g^{-1} = P_{s+1}$ gilt, also folgt, daß N' kein Normalteiler in G sein kann.

Nummehr betrachten wir zuerst den Fall 1. Sei $L(\subseteq \equiv N, \neq H)$ ein echter Normalteiler von G . Aus den vorher gesagten und aus der Einfachheit von H folgt $L \cap N = L \cap H = 1$. Da $L \cap N = 1$ ist, ist $LN = L \times N$. Der Fall $G \supset L \times N (\supset N)$ kann nicht bestehen, da aus diesem $H \cap (L \times N) \neq 1$ folgen würde, was der Einfachheit von H widerspricht. $G = L \times N$ ist auch unmöglich.

Wir betrachten dann den Fall 2. Sei $L(\subseteq \equiv N)$ echter Normalteiler in G . Die Gruppe LN ist echter Normalteiler von G , da N die Frattinische Untergruppe ist. Dann ist aber G/N nicht einfach, in Gegensatz zur Voraussetzung des Satzes.

Endlich betrachten wir den Fall 3. Sei $L(\subseteq \equiv N)$ echter Normalteiler in G . $L \supset N$ kann nicht bestehen, da daraus $H \cap L \supset D$ folgen würde, was der Einfachheit von H/D widerspricht. Deshalb ist $L \cap N = 1$, woraus $LN = L \times N$ folgt. Es ist $L \times N \subseteq G$, da im entgegengesetzten Fall $H \cap (L \times N) \supset D$ folgen würde, was der Einfachheit von H/D widerspricht. Der Fall $L \times N = G$ kann auch nicht bestehen (nach der Annahme des Satzes). Es ist evident, daß auch $H \cap L = 1$ gilt.

1. Bemerkung. In den Fällen 1 und 3, wenn N keine zu H isomorphe Untergruppe enthält, folgt, daß N in G kein direkter Faktor ist. Es sei nämlich $G = HN = L \times N$. Wir können annehmen, daß N eine einfache Gruppe ist. Man kann die Elemente von H in der Form $l_i n_i$ ($i = 1, 2, \dots; l_i \in L, n_i \in N$) annehmen. Die Elemente n_i ($i = 1, 2, \dots$) von N sind (wegen $H \cap L = 1$) verschieden, außerdem bilden sie eine zu H isomorphe Untergruppe von N .

2. Bemerkung. Die auflösbaren Gruppen G , die nur einen echten Normalteiler besitzen, können genau angegeben werden. Wenn für G der Fall 1 vorliegt, dann ist H offenbar eine Gruppe von Primzahlordnung und N eine elementare Abelsche Gruppe. G kann keine Gruppe von Primzahlpotenzordnung sein, also sind die Ordnungen von H und N relativ prim. Es ist auch klar, daß H eine maximale Untergruppe in G ist, woraus leicht folgt, daß G eine (zentrumlose) einstufig nichtabelsche Gruppe ist. Diese Gruppen sind vollständig bekannt (S. z. B. RÉDEI [4]).

Im Fall 2 ist G/N offenbar eine Gruppe von Primzahlordnung und G selbst eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung. Es ist leicht zu sehen, daß unter diesen nur die zyklische Gruppe der Ordnung p^2 (p Primzahl) unseren Bedingungen entspricht.

Zum Fall 3 gehört offenbar keine auflösbare Gruppe.

Literaturverzeichnis.

- [1] D. R. TAUNT, Finite groups having unique proper characteristic subgroup, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **51** (1955), 25—36.
- [2] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin 1937), S. 77, Satz 2.
- [3] G. FRATTINI, Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni, *Rend. Atti R. Accad. Lincei*, (4) **1** (1885), 281—285, 455—457.
- [4] L. RÉDEI, Das "schiefe Produkt" in der Gruppentheorie, *Commentarii Math. Helvetici*, **20** (1947), 225—264.

(Eingegangen am 16. März 1955.)