Bibliographie.

P. Samuel, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 4), IX + 133 p., Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

Ce travail a pour but de donner un premier exposé d'ensemble des fondements de la Géométrie Algébrique abstraite. Il contribuera sans aucun doute à simplifier la tâche de tous les mathématiciens désireux d'acquérir ou de compléter une documentation qu'ils étaient forcés, jusqu'à présent, de puiser dans de nombreux ouvrages utilisant des méthodes et des langages très divers. L'auteur a, en effet, réussi à mener à bien la tâche difficile qu'il s'était imposée : faire connaître les différents points de vue actuels et les mettre en parallèle, tout en donnant un exposé à la fois clair et complet, non seulement des résultats, mais aussi de certaines démonstrations importantes.

Le premier des deux chapitres qui composent cet ouvrage, intitulé "Théorie globale élémentaire", commence par la définition des ensembles algébriques et des variétés affines ou projectives ainsi que de quelques unes des notions générales qui s'y rattachent : points génériques, spécialisations, produits, projections, intersections, normalité. C'est seulement après une étude aussi complète que possible des variétés définies sur un corps de base fixe (k-variétés), qu'on examine les effets d'une extension du corps de base et qu'on aborde l'étude des variétés proprement dites, ou "variétés absolues". Les difficultés qui peuvent alors surgir en caractéristique non nulle sont clairement énoncées et délimitées. L'auteur procède à un examen détaillé des différents types de propriétés vraies "presque partout" (c'est-à-dire pour les points d'une variété situés en dehors d'un de ses sous-ensembles algébriques), puis expose la méthode des coordonnées de Chow et ses applications à l'étude des spécialisations des variétés ou des cycles, ainsi qu'à celle des correspondances et des systèmes algébriques de cycles.

Le second chapitre est consacré à la Géométrie Algébrique locale et aux multiplicités d'intersection. Les notions géométriques qui y interviennent sont définies et étudiées par la théorie générale des anneaux locaux et de leurs complétés : normalité locale, cône des tangentes, espace tangent de Zariski. L'auteur expose les critères "jacobiens" de Zariski pour caractériser les points simples des variétés algébriques (faisant intervenir, en caractéristique non nulle, des "dérivations mixtes"), puis aborde l'étude de la notion de multiplicité d'intersection, en montrant l'équivalence de ses deux principaux modes de définition : celle de Chevalley, qui utilise la notion de longueur d'un idéal primaire dans un anneau local, et celle de Weil, qui repose sur la notion de multiplicité d'une spécialisation. La théorie des multiplicités, ainsi que ses généralisations, dues à l'auteur, au cas des composantes excédentaires ou singulières est ensuite appliquée à l'établissement des propriétés locales et globale des intersections de cycles.

Un certain nombre de résultats algébriques généraux, utiles pour la lecture de cet ouvrage, sont exposés dans un "Rappel Algébrique", lui-même suivi d'un intéressant annexe historique.

A. Néron (St. Ouen, France)

Otto Haupt, Differential- und Integralrechnung. Unter Mitarbeit von Georg Aumann. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage unter Mitwirkung von **Christian Pauc, Bd. III: Integralrechnung** (Göschens Lehrbücherei, Bd. 26), XI + 319 S., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1955.

Während die ersten zwei Bände bei Behaltung des Aufbaus wesentlich neubearbeitet wurden, wurde der vorliegende dritte Band völlig neugeschrieben, sodaß man von einem neuen Buch sprechen darf. Um die Richtung der neuen Fassung kurz zu charakterisieren, könnte man sagen, daß der ganzen modernen Maß- und Integrationstheorie (man möchte etwa ans Stoff des wohlbekannten Buches von Saks denken) eine möglichst verallgemeinerte abstrakte Darstellungsweise verliehen wurde.

Im Sinne dieser abstrahierenden und verallgemeinernden Richtung wurden in der Maßtheorie statt auf Mengenkörpern definierter Inhalte und Maße auf (abstrakten) Verbänden definierte additive und σ-additive Somenfunktionen zugrunde gelegt. Aus diesem Grund beschäftigt sich der erste Abschnitt mit den Elementen der Verbandstheorie, in erster Reihe mit den Eigenschaften der (den Mengenkörpern entsprechenden) Booleschen Verbände, deren Theorie bis zum Stoneschen Satz gefolgt wird. Im zweiten Abschnitt werden die Begriffe von Inhalt, Maß, Vollständigkeit eines Inhalts, äußerem und innerem Maß im erwähnten verallgemeinerten Sinne eingeführt und ihre einfachsten Eigenschaften untersucht. Im dritten Abschnitt wird die Frage der Erweiterung von Inhalten und Maßen nebst der mit Hilfe des äußeren Maßes operierenden Methode auch durch einen in größerem Maße konstruktiven Vorgang behandelt. Als Anwendung werden Inhalte und Maße in euklidischen Räumen, insbesondere Jordanscher Inhalt und Lebesguesches Maß untersucht.

Im vierten Abschnitt werden die klassische Theorie der bezüglich eines σ-Mengenkörpers meßbaren Punktfunktionen entwickelt, das (abstrakte) Lebesguesche Integral mit Hilfe von durch abzählbar unendliche meßbare Unterteilungen bestimmten unteren bzw. oberen Summen definiert und seine formalen Eigenschaften einschließlich der Limmessätze behandelt. Der fünfte Abschnitt beschäftigt sich mit dem unbestimmten Integral und mit den verschiedenen Zerlegungssätzen für additive und σ-additive Mengenfunktionen beliebigen Vorzeichens. Im sechsten Abschnitt finden wir eine Darstellung vom Aufbau der Theorie des abstrakten Lebesgueschen Integrals mit Hilfe der Erweiterung eines Elementarintegrals, d. h. eines über dem Vektorverband der sogenannten elementaren Funktionen definierten positiven linearen Funktionals, und zwar geschieht das durch zwei verschiedene Methoden. In diesem Gedankenkreis wird der Hilbertsche Raum der quadratisch summierbaren Funktionen untersucht. Der siebente Abschnitt entwickelt die Maß- und Integrationstheorie in Produkträumen und den Fubinischen Ideenkreis.

Im achten Abschnitt wird eine Theorie der abstrakten Verallgemeinerung des Jordanschen Inhalts und des Riemannschen Integrals dargestellt. Zu diesem Zweck wird ein Maß zugrunde gelegt, das auf einem aus Teilmengen eines topologischen Raumes bestehenden σ-Mengenkörper definiert ist; der Zusammenhang zwischen Topologie und Maß wird durch verschiedene Forderungen bestimmt. Mit Hilfe dieses Maßes werden quadrierbare Mengen als Mengen mit Rand vom Maß Null definiert; sie bilden einen Mengenkörper und das Maß, auf diesen Mengenkörper eingeschränkt, liefert den verallgemeinerten Jordan-Inhalt, auf welchen sich ein grosser Teil der klassischen Theorie übertragen läßt.

Der neunte Abschnitt gibt eine abstrakte Theorie der Derivierten von σ-additiven Mengenfunktionen. Unter verschiedenen Voraussetzungen bezüglich der Ableitungsbasis, die die zur Bildung der Differenzenquotienten zugestatteten Mengen enthält, wird eine Reihe von Dichtesätzen, *Differenzierbarkeitssätzen, Zerlegungssätzen und Meßbarkeitssätzen* bewiesen. Im erheblichen Teil auch dieses Abschnitts geben die Verfasser Darstellung eigener Ergebnisse. Im zehnten Abschnitt werden die Voraussetzungen insofern modifiziert, daß einerseits statt σ-Additivität nur Additivität der Mengenfunktionen gefordert, andererseits aber die Ableitungsbasis weiteren Einschränkungen unterworfen wird; hier wird eine abstrakte Formulierung von der Theorie der Funktionen beschränkter Variation, der totalstetigen Funktionen, sowie des Burkill-Integrals behandelt, ferner eine Art abstrakten Denjoy-Integrals gründlich untersucht.

Der letzte Abschnitt enthält, ähnlich der ersten Auflage, als Anwendungen die Theorie des Oberflächenmaßes k-dimensionaler dehnungsbeschränkter Flächenstücke im euklidischen Raum E_n und die Integralsätze von GAUSS, GREEN und STOKES.

Die obige kurze Inhaltsübersicht zeigt schon, daß dieses Werk eine ausgezeichnete Zusammenfassung der neueren und neuesten abstrakten Integrationstheorien für den Fachmann bietet. Mit Rücksicht darauf, daß es um einen Band von Göschens *Lehr*bücherei handelt, ist es nach Meinung des Ref. bedauernswert, daß die Notwendigkeit und Nützlichkeit des Bestrebens nach Allgemeinheit nicht durch eine größere Anzahl von Beispielen und Anwendungen unterstützt wird. In dieser Hinsicht sei es erwähnt, daß der Vitalische Überdeckungssatz für Würfeln im euklidischen Raume im Buche *nicht* bewiesen wird, folglich sind die Beweise des Maßdichtesatzes usw. einschließlich des Satzes von RADEMACHER über totale Differenzierbarkeit dehnungsbeschränkter Funktionen als Folgerungen des erwähnten Satzes auch unvollständig. Vorliegendem Buch gelingt es leider nicht die Vorurteile eines Lesers, der Abstraktheit und Verallgemeinerung nicht für Selbstzweck hält, zu zerstreuen.

Ákos Császár (Budapest)

R. Baldus—F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie (Sammlung Göschen, Band 970). Dritte, verbesserte Auflage, 140 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1953.

Der Herausgeber FRANK LÖBELL hat dieser Neuauflage ein Nachwort für RICHARD BALDUS beigefügt, davon abgesehen unterscheidet sich diese dritte Auflage kaum von der zweiten, die 1944 erschien. Das in seiner Art ausgezeichnete Büchlein besteht unverändert aus sechs Abschnitten und 123 Nummern.

Im I. Abschnitt wird der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie geschildert. Hierbei sollte erwähnt, ja betont werden, daß die Entdecker der hyperbolischen Geometrie ihre Widerspruchslosigkeit noch nicht bewiesen haben und dieser Beweis erst später, durch die Arbeiten von E. BELTRAMI, F. KLEIN und H. POINCARÉ erbracht wurde.

Im II. Abschnitt wird in ihren Hauptzügen die absolute (d. h. vom Parallelenaxiom unabhängige) ebene Geometrie dargestellt. Zugrunde gelegt wird dabei das Hilbertsche Axiomensystem in einer von R. BALDUS veränderter Form. Die Verknüpfungsaxiome sind nämlich durch die Annahme geeigneter Anordnungsaxiome und des Dimensionsaxiom ausgeschaltet, und neben dem Archimedischen Axiom wird das Cantorsche Stetigkeitsaxiom (beide in einer speziellen Form) vorausgesetzt. Dann folgt im III. Abschnitt die Absonderung der Euklidischen und der hyperbolischen ebenen Geometrie: es wird bewiesen, daß wenn es durch mindestens einen Punkt zu mindestens einer ihn nicht enthaltenden Geraden genau eine Parallele gibt, dann gilt dies für alle Punkte und Geraden. Im IV. Abschnitt werden sodann die Axiome der absoluten Geometrie durch Hinzufügung des Nichteuklidischen Parallelenaxioms (laut welchem in mindestens einem Falle mehr als eine Parallele existiert) zu einem vollständigen Axiomensystem der hyperbolischen ebenen Geometrie ergänzt. Es wird ausführlich gezeigt, daß das Klein—Hilbertsche Kreismodell diesem Axiomensystem genügt, die hyperbolische ebene Geometrie also widerspruchslos ist.

Im V. Abschnitt werden nun in diesem Kreismodell die Grundzüge der hyperbolischen Geometrie hergeleitet. Behandelt sind u. a. randparallele und überparallele Geraden, Abstandslinien, Winkelsumme im Dreieck, Parallelwinkel, Fundamentalkonstruktionen, merkwürdige Punkte des Dreiecks, Trigonometrie, Dreiecksinhalt, Umfang und Flächeninhalt des Kreises, asymptotische Dreiecke, Grenzkreise.

Der VI. Abschnitt ist Schlußbetrachtungen gewidmet. Zunächst wird man durch Andeutungen darüber beruhigt, daß die hergeleiteten Sätze vom benutzten Modell unabhängig sind, also tatsächlich zum Bestande der hyperbolischen Geometrie gehören. Dann wird das Wesen der elliptischen Geometrie gestreift und endlich das Verhältnis der Geometrie zur Wirklichkeit kurz auseinandergesetzt.

Paul Szász (Budapest)

Jacqueline Lelong-Ferrand, Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée (Cahiers scientifiques, fasc. 22), VII + 257 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1955.

The author investigates the properties of conformal mapping by neglecting intentionally its analytical character. In this way it is possible to state most of the results in a form which is valid for a class of mappings, larger than the class of conformal mappings. Two classes among these play the most important rôle, namely the class of quasi-conformal mappings, respectively the class of mappings, defined by functions having continuous partial derivatives, and bounded Dirichlet-integrals.

Chapter I deals with the properties of mappings, defined by functions with bounded Dirichlet-integral. (Making use of the noneuclidean, spherical metric, one can extend this property also to mappings defined on unbounded regions.) Several theorems, proved by Grötzsch, Koebe, Lindelöf, Denjoy, Wolff, Grunsky, Bermant, and Goluzin for the case of conformal mappings, are extended to this much larger class of mappings. We point out the following interesting generalization of Fatou's theorem: A mapping with bounded Dirichlet-integral, defined in a circle, has a limit along almost all radiuses.

In Chapter II the author proves that, making certain semi-topological, semi-metrical additional restrictions concerning the mapping (besides the boundedness of the Dirichlet-integral, and the continuity of partial derivatives), one can estimate the module of continuity of the mapping.

Chapter III investigates the behaviour of topological transformations with bounded Dirichlet integral, at the boundary of the mapped region. Making use of the notion "Primende", introduced by Carathéodory, and introducing an adequate topology and metric, the author is able to define a module of continuity also at the boundary.

Chapter IV deals with the convergence of uniformly continuous sequences of transformations, investigated in the previous chapter, and extends a result of Carathéodory to the case of unbounded regions. Using this result, a new proof is given for the theorem of Ostrowski, concerning the preservation of the angle by conformal mapping at the boundary.

In Chapter V the author introduces the notion of "preholomorphic" lattice-function, and proves that it fits for the approximation of regular functions. (The preholomorphic lattice functions are strongly related to the preharmonic lattice functions, introduced by Philips, Wiener, and Bouligand). Using this notion, he gives a new proof for the fundamental theorem of conformal mapping, due to Riemann, as well as for its generalizations concerning n-uply, or infinitely connected regions.

Chapter VI deals with different deformation theorems, first of all with the Ahlfors inequality, with its sharpening, due to the author, and with the application of the latter to the problem of angular derivatives.

Chapter VII gives the generalization of some results of the first chapter, to the class of Beppo Levi—Nikodym, respectively to a restricted class, introduced by the author. In this chapter, methods of potential theory find their application.

The value of the monograph is increased by the historical notes at the end of each chapter. Unfortunately, even these notes give often no exact answer to the question, which results of the book are due to the author, and which to others.

T. Kővári (Budapest)

Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. I, 531 Seiten, Basel, Birkhäuser, 1955.

Die Basler Naturforschende Gesellschaft betrachtet die Herausgabe der Schriften der Basler Mathematiker des XVIII. Jahrhunderts (zwölf namhafte Gelehrten, unter ihnen vier Klassiker) als eine nationale Pflicht. Da die Gesamtausgabe der Euler (Leonhard Vater und Johann Albert Sohn) schon in Verwirklichung ist und die Gesellschaft schlägt vor, auch Niklaus Fuss' Arbeiten zu jener Sammlung anzuschliessen, umfaßt das endgültige Projekt der Herausgabe acht Trägern des Namens Bernoulli (in erster Linie Jakob I, Johann I und Daniel I) und Jakob Hermann.

Das ausführliche Vorwort des Herausgebers (Prof. O. Spiess) berichtet über die großangelegten und interessanten Vorarbeiten des Gesamtwerkes und gibt kurz das Editionsplan von ungefähr 22 Bänden (S. 80).

In den Teilen *A* und *B* des vorliegenden ersten Bandes der ersten Serie (Korrespondenzen) werden die Briefwechseln von Johann I Bernoulli mit dem Bruder Jakob I und dem Marquis de l'Hôpital publiziert; damit gelangen zur Öffentlichkeit die letzten Komponenten von dem Material, was aus den Briefaustauschen von Leibniz, Huygens, den Brudern Bernoulli und de l'Hôpital, den damaligen großen Mathematikern des Kontinents erhalten ist. Das Material ist sowohl aus rein mathematischem als auch historischem Gesichtspunkte von Interesse.

Teil *A* gibt die 4 erhaltenen Stücke der *privaten* Korrespondenz der Brüder (als Gegenteil ihrer gedruckten polemischen *offenen* Briefen) und die Rekonstruktion des ganzen Briefwechsels von dem Herausgeber. Den Hauptteil bildet die Korrespondenz mit dem Marquis, 26 Briefe von und 60 an Bernoulli.

Die vorkommenden Probleme gehören größtenteils der Geometrie, Mechanik, Optik und Reihenlehre an und werden mit der "neuen" Methode behandelt. "Die Lektüre all dieser Briefe — sagt die Einleitung und meint alle fünf erwähnten Gelehrten — läßt uns das Keimen der Ideen und ihren Reflex in den verschiedenen Persönlichkeiten geradezu dramatisch miterleben."

Die Publikation entdeckt auch die Wahrheit im Streite Johanns gegen den Marquis. Es wird aus den Briefen de l'Hôpitals nachgewiesen, daß dem von ihm verfaßten ersten Lehrbuche der Differentialrechnung „Analyse des infiniment petits" und seinen anderen Schriften Bernoullis persönliche und briefliche Unterweisungen zugrunde liegen. Eine der auffallendsten Angaben ist darüber Brief Nr. 20 des Marquis mit dem nackten Antrage: "je vous donnerai une pension de trois cent livres... je vous prierai de me donner par intervalles quelques heures de vôtre temps, pour travailler sur ce que je vous demanderai et de me communiquer aussi vos découvertes en vous priant en mesme temps de n'en faire point de part à d'autres..." (S. 202). Der Herausgeber kommt zur Konklusion: "Auf keinem Gebiet hat DE L'HÔPITAL tatsächlich die Wissenschaft mit neuen Gedanken bereichert. Bei der berühmten Regel, die noch heute seinen Namen trägt, stammen Problemstellung und Lösung ausschließlich von Johann BERNOULLI" (S. 155).

Teil C enthält 70 Briefe von und an Johann mit "kleinen" Korrespondenten; diese berühren nur selten mathematische Gegenstände. Der Anhang gibt verschiedene Verzeichnisse geschichtlichen und sachlichen Inhalts.

T. Bakos (Szeged)

C. Carathéodory, Mass und Integral und ihre Algebraisierung. Herausgegeben von P. FINSLER, A. ROSENTHAL und R. STEUERWALD. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 10.) 357 S., Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1956.

Seit 1938 begann C. CARATHÉODORY in mehreren Veröffentlichungen eine möglichst algebraisierte, auf verbandstheoreischer Grundlage aufgebaute Maß- und Integrationstheorie auszuarbeiten. Er arbeitete bis zu seinem Ableben an einer systematischen Darstellung dieser Theorie und es gelang ihm noch das Manuskript zu vollenden. P. FINSLER, A. ROSENTHAL und R. STEUERWALD übernahmen nach dem Ableben des Verfassers die schwere Aufgabe, die durch die lange Zeitdauer des Entstehens vom Manuskript verursachten Unstimmigkeiten zu beseitigen und die endgültige Form des Textes zu bestimmen.

In der algebraisierten Maß- und Integrationstheorie wird die Rolle der Punktmengen von abstrakten, mit denen der Punktmengen ähnlichen Ordnungs- und Verknüpfungseigenschaften axiomatisch versehenen Dingen, sogenannten Somen, übernommen. Diese werden als Elemente eines Booleschen Ringes definiert, d. h. eines algebraischen Ringes mit den Operationen der (der Bildung der symmetrischen Differenz von Punktmengen entsprechenden) Verbindung $A \dotplus B$ und der (der Bildung des gemeinsamen Teiles von Punktmengen entsprechenden) Multiplikation AB, in welchem jedes Element idempotent ist; das Nullelement bezeichnet man mit O. In einem solchen Ring wird die Operation der Vereinigung durch $A \dotplus B = A \dotplus B \dotplus AB$ und eine teilweise Ordnung durch $(A \subseteq B) \equiv (AB = A)$ definiert. Es stellt sich heraus, daß in dieser Ordnung die Somen A und B die kleinste gemeinsame Majorante $A \dotplus B$ und die größte gemeinsame Minorante AB besitzen. Es wird dann noch die Existenz einer kleinsten gemeinsamen Majorante von einer beliebigen abzählbaren Menge $\{A_i\}$ von Somen postuliert und mit $\sum_{i=1}^{\infty} \dotplus A_i$ bezeichnet; daraus folgert man die Existenz einer größten gemeinsamen Minorante $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$. Es wird gezeigt, daß diese Begriffe die bekannten formalen Eigenschaften der entsprechenden mengentheoretischen Begriffe besitzen. Diese grundlegenden Überlegungen bilden den Inhalt des ersten Kapitels.

Im zweiten Kapitel werden einige Klassen von Somenmengen behandelt, insbesondere die gegen die Verbindung und die endliche Vereinigung abgeschlossenen Somenringe und die außerdem noch gegen die abzählbare Vereinigung abgeschlossenen vollkommenen Somenringe. Dann werden die Homomorphien von vollkommenen Somenringen untersucht, und es wird ein Homomorphiesatz bewiesen, in welchem die Rolle der algebraischen Ideale durch „vollständige" vollkommene Teilringe $\mathfrak{N}$ (d. h. solche vollkommene Teilringe, bei denen aus $A \in \mathfrak{N}$, $A \subseteq B \in \mathfrak{N}$ immer $A \in \mathfrak{N}$ folgt) übernommen wird.

Am schwersten ist in der abstrakten Theorie die Einführung der Punktfunktionen. Die Grundlage dafür bildet der Gedanke, sie durch die Gesamtheit ihrer Urbildmengen $\{x : f(x) < y\}$ zu ersetzen. Zu diesem Zweck wird der Begriff einer *Somenskala* mit dem Definitionsbereich M eingeführt, d. h. einer Schar von Somen $S(y) \subseteqq M$, die vom reellen Parameter y wachsend abhängen: aus $y < z$ folgt $S(y) \subseteqq S(z)$. In der Menge der Somenskalen wird eine teilweise Ordnung definiert: für zwei Somenskalen T, S soll $T \leqq S$ dann bestehen, wenn aus $y < z$ immer $S(y) \subseteqq T(z)$ folgt. Bestehen gleichzeitig die Relationen $T \leqq S$ und $S \leqq T$, so heißen S und T äquivalent. Eine *Ortsfunktion* mit dem Definitionsbereich M wird nun als eine Klasse von äquivalenten Somenskalen definiert. Die Ortsfunktion f heißt endlich, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \dot{+} S(n) = M$ und $\prod_{n=1}^{\infty} S(-n) = O$ für eine beliebige ihrer Somenskalen gilt. Die teilweise Ordnung der Somenskalen erzeugt eine teilweise Ordnung der Ortsfunktionen. Für eine abzählbare Menge $\{f_i\}$ von Ortsfunktionen existiert in dieser teilweise Ordnung immer eine kleinste Majorante $\sup f_i$ und eine größte Minorante $\inf f_i$. Ist f eine Ortsfunktion mit dem Definitionsbereich M und ist $X \subseteqq M$, so werden durch $\alpha(X) = \sup\{y : XS(y) = O\}$ und $\beta(X) = \inf\{y : XS(y) = X\}$ die untere und obere Grenzen von f auf X definiert. Es werden die Eigenschaften der Funktionen $\alpha(X)$ und $\beta(X)$ behandelt, und es wird ein Satz von A. Bischof bewiesen, der notwendige und hinreichende Bedingungen angibt dafür, daß zwei gegebene Somenfunktionen die untere und obere Grenzfunktionen einer Ortsfunktion sind.

Im vierten Kapitel handelt es sich um das Rechnen mit Ortsfunktionen. Die Definitionen von $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$ und $\lim f_n$ und der Beweis der bekannten formalen Eigenschaften dieser Begriffe ergeben sich leicht mit Hilfe der Begriffe $\sup f_n$ und $\inf f_n$. Nicht so einfach ist die Frage nach der Zusammensetzung von Ortsfunktionen. Dazu betrachte man eine reelle, endliche Funktion $\chi(u_1, \ldots, u_m)$ von m reellen Veränderlichen; ist $v_j \leqq w_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, so bezeichne man mit $\psi(v_j, w_j)$ bzw. $\Psi(v_j \leqq w_j)$ die untere bzw. obere Grenze der Zahlen $\chi(u_1, \ldots, u_m)$, wenn die Veränderlichen u_j den Bedingungen $v_j \leqq u_j \leqq w_j$ unterworfen sind. Sind nun $f_1, \ldots, f_m$ endliche Ortsfunktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich M und mit den Grenzfunktionen $\alpha_j(X)$, $\beta_j(X)$ $(j = 1, \ldots, m)$, so gibt es eine und nur eine Ortsfunktion g mit den Grenzfunktionen $\alpha(X)$, $\beta(X)$, so daß

$$\psi(\alpha_j(X), \beta_j(X)) \leqq \alpha(X) \leqq \beta(X) \leqq \Psi(\alpha_j(X), \beta_j(X))$$

für $X \subseteqq M$ gilt. Diese Ortsfunktion g bezeichnet man mit $\chi(f_1, \ldots, f_m)$ und es wird gezeigt, daß diese Definition die gewöhnlichen Rechenregeln gewährt. Insbesondere kann man nun von Summen und Produkten von endlich vielen endlichen Ortsfunktionen sprechen.

Das fünfte Kapitel ist hauptsächlich der Untersuchung von *Maßfunktionen* gewidmet. So wird eine nichtnegative, nicht notwendig endlichwertige Somenfunktion $\varphi(X)$ genannt, wenn sie auf einem wollkommenen Ring $\mathfrak{A}$ definiert ist, $\varphi(O) = 0$ gilt und aus $B \in \mathfrak{A}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $B \subseteqq \Sigma \dot{+} A_i$ immer $\varphi(B) \leqq \Sigma \varphi(A_i)$ folgt. Auf die Maßfunktionen wird die klassische, vom Verfasser stammende Theorie der Meßbarkeit angewendet und es wird bewiesen, daß eine Maßfunktion auf dem vollkommenen Ring der für sie meßbaren Somen volladditiv ist (d. h. aus $A_i A_j = O$ für $i \neq j$ immer $\varphi(\Sigma \dot{+} A_i) = \Sigma \varphi(A_i)$ folgt, wenn nur die Somen A_i meßbar für φ sind). Als Beispiel wird der Borel—Lebesguesche Inhalt behandelt.

Im sechsten Kapitel werden die für eine Maßfunktion φ meßbaren Ortsfunktionen definiert und dann das Integral, zuerst für nichtnegative Ortsfunktionen, erklärt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Maßfunktion φ und eine für φ meßbare, nichtnegative Ortsfunktion f mit den Grenzfunktionen $\alpha(X)$ und $\beta(X)$, deren Definitionsbereich M Vereinigung von abzählbar vielen, für φ meßbaren Somen mit endlichem Maß ist. Dann gibt es eine und nur eine Maßfunktion ψ, welche für $X \subseteq M$ definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt: jedes für φ meßbare Soma ist auch für ψ meßbar, aus $\varphi(X)=0$ folgt $\psi(X)=0$, endlich gilt

$$\alpha(X)\,\varphi(X) \leq \psi(X) \leq \beta(X)\,\varphi(X)$$

für $X \subseteq M$ und $0<\varphi(X)<+\infty$. Die Maßfunktion ψ wird nun das *Integral* von f für die Maßfunktion φ genannt. Das Integral von Ortsfunktionen von beliebigem Vorzeichen wird durch Zerlegung auf positiven und negativen Teil erklärt. Nach den formalen Eigenschaften des Integrals (Linearität, usw.) folgen der Satz von Nikodym und, schon im siebenten Kapitel, die Sätze von der Integration von Funktionsfolgen (Sätze von Egoroff, Levi, Lebesgue, Fatou). Dann wird die Konvergenz im Mittel behandelt und ein Beweis für den Hauptsatz von Birkhoff der Ergodentheorie dargestellt.

Das achte Kapitel beginnt mit folgender Bemerkung. Wird auf einer, das leere Soma O enthaltenden Teilmenge $\mathfrak{B}$ eines vollkommenen Ringes $\mathfrak{A}$ eine nichtnegative, endliche Somenfunktion $p(U)$ mit $p(O)=0$ beliebig vorgeschrieben, so existiert immer auf $\mathfrak{A}$ eine maximale Maßfunktion ψ, die für $U \in \mathfrak{B}$ der Bedingung $\psi(U) \leq p(U)$ genügt und die eindeutig durch

$$\psi(X)=\inf\Big(\sum_j p(U_j):\ U_j \in \mathfrak{B},\ \sum_j\dotplus\, U_j \supseteq X\Big)$$

definiert ist. Entsteht nun eine Maßfunktion ψ durch die soeben beschriebene Konstruktion und gilt $p(U)=\psi(U)$ für $U \in \mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}$ eine Basis der Maßfunktion ψ. Besitzt eine Maßfunktion μ^* eine lauter aus für sie meßbaren Somen bestehende Basis, so heißt sie eine *reguläre Maßfunktion* oder ein *äußeres Maß*. Auf solche kann man die von J. Ridder stammende Theorie der adjungierten Somenfunktionen anwenden und innere Maße definieren. Die Untersuchung der äußeren und inneren Maße bildet den Gegenstand des neunten Kapitels.

Im zehnten Kapitel werden *gleichartige* äußere Maße, d. h. äußere Maße mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ und Basis $\mathfrak{B}$ untersucht. An dieser Gelegenheit wird die Jordansche Zerlegung der totaladditiven Somenfunktionen von beschränkter Variation behandelt. Das letzte Kapitel wird der Untersuchung der Inhaltsfunktionen gewidmet, insbesondere dem Borel—Lebesgueschen Inhalt und dem Lebesgueschen Integral, für das der Vitalische Überdeckungssatz und der Satz von Lebesgue über die Differentiation des unbestimmten Integrals bewiesen werden. Auch wird das lineare Maß von mehrdimensionalen Punktmengen behandelt.

Ein Anhang bringt ein anderes, auf dem Begriff der teilweise geordneten Mengen begründetes Axiomensystem für die Somen. Seine Äquivalenz mit dem früheren wird gezeigt und dann wird es auf die Konstruktion eines vollkommenen Somenringes angewendet, der keinem σ-Ring von Mengen isomorph ist.

Im Obigen konnten wir die Gedanken und Methoden des Buches nur in den Hauptlinien verfolgen, viele interessante Einzelheiten mußten weggelassen werden. Es ist bedauernswert, aber durch die Entstehungsumstände des Buches erklärbar, daß im Gegensatz zu den sehr klar geschriebenen ersten Kapiteln, die späteren etwas weniger sorgfältig ausgearbeitet sind. Z. B. wird die Tatsache, daß man die Summe nur von endlichen Ortsfunktionen erklärt hat, oft außer Acht gelassen, was aber glücklicherweise zu keinen ernsten Schwierigkeiten führt. Satz 5 unter Ziffer 244, S. 268 ist im angegebenen Wortlaut unrichtig, wird aber richtig, wenn man noch voraussetzt, das K meßbar für μ^* und jedes Soma $X \in \mathfrak{A}$ mit abzählbar vielen Somen aus $\mathfrak{B}$ überdeckbar ist, was zu den späteren Anwendungen genügt. Trotz diesen kleineren Unstimmigkeiten ist das vorliegende Buch, der Schwanengesang des ausgezeichneten Gelehrten, gewiß ein Gewinn ersten Ranges der maßtheoretischen Literatur.

Ákos Császár (Budapest)