Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen.

Von G. FODOR in Szeged.

Sei Λ eine Ordnungszahl von zweiter Art, die nicht mit ω konfinal ist und M eine Teilmenge der Menge $W(\Lambda)$ aller ξ, für die $\xi < \Lambda$ gilt. Auf M sei eine transfinite Funktion $f(\alpha) < \alpha$ mit $\alpha \geqq 1$ (und $\varphi(0) = 0$ im Fall, daß $0 \in M$) definiert. Wir nehmen an, daß M stationär ist. Im vorliegenden Artikel wollen wir uns mit dem folgenden Problem befassen.

Problem. *Gibt es immer eine Ordnungszahl $\beta < \Lambda$ und eine stationäre Teilmenge N von M, so daß $f(\alpha) \leqq \beta$ für alle $\alpha \in N$ ist?*

Wir werden zeigen, daß die Lösung dieses Problems positiv ist.

Bei den Bedingungen dieses Problems gilt der folgende Satz:

a) *Es gibt eine Ordnungszahl $\beta < \Lambda$ und eine Menge der Ordnungszahlen $\alpha_\xi \in M$, die mit M zusammengehörig ist, so daß $f(\alpha_\xi) \leqq \beta$ für alle α_ξ ist* (G. FODOR [7]).

Dieser Satz wurde vor der genannten Arbeit des Verfassers in den folgenden speziellen Fällen bewiesen:

1. $\Lambda = \omega_1$ und $M = W(\omega_1)$ (ALEXANDROFF und URYSOHN [1]),
2. $\Lambda = \omega_{\nu+1}$ und $M = W(\omega_{\nu+1})$ (BEN DUSHNIK [2]),
3. $M = W(\Lambda)$ (P. ERDÖS [3]),
4. $\Lambda = \omega_1$ und M eine abgeschlossene Teilmenge von $W(\omega_1)$ (J. NOVÁK [4]),
5. Λ eine reguläre Limeszahl (W. NEUMER [5]),
6. M eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche abgeschlossene Teilmenge von $W(\Lambda)$ (H. BACHMANN [6]).

Ferner gilt der Satz:

b) *Wenn M nicht stationär ist, so läßt sich auf M eine regressive Funktion φ definieren, so daß für jedes $\beta < \Lambda$ die Menge der $\alpha \in M$, für die $\varphi(\alpha) \leqq \beta$ gilt, nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist* (vgl. [6] § 9, Satz 2).

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [6]). Ist Λ eine Ordnungszahl, so bedeute $W(\Lambda)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\xi < \Lambda$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(\Lambda)$ ohne Maximum, so heißen M und N *zusammengehörig*, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder

der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ *konfinal* mit ν, wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index γ der kleinsten Ordnungszahl ω_γ, mit der α konfinal ist. Eine Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt in $W(\Lambda)$ *abgeschlossen*, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $< \Lambda$ ist. Eine in $W(\Lambda)$ abgeschlossene, mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge von $W(\Lambda)$ heißt ein *Band* von $W(\Lambda)$. Eine Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt *stationär*, wenn $W(\Lambda)-M$ kein Band von $W(\Lambda)$ enthält. Eine auf einer Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion φ heißt *regressiv*, wenn $\varphi(\xi) < \xi$ für alle Argumente $\xi \in M$ mit $\xi \geqq 1$ (und $\varphi(0)=0$ im Fall, daß $0 \in M$).

Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Sei Λ eine Limeszahl mit $cf(\Lambda)>0$ (d. h. Λ ist nicht mit ω konfinal), $\{K_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ ($\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)}$) eine Folge vom Typ $\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)}$ von nicht-leeren und paarweise disjunkten nicht-stationären Teilmengen von $W(\Lambda)$ und x_α das erste Element von K_α ($\alpha < \tau$). Ist die Menge $U=\{x_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ nicht-stationär, und im Falle $\tau=\omega_{cf(\Lambda)}$ mit $W(\Lambda)$ zusammengehörig, so ist die Menge $\bigcup_{\alpha<\tau} K_\alpha$ nicht-stationär.*[1])

Beweis. Wenn φ eine regressive Funktion auf $N \subseteqq W(\Lambda)$ ist, so bezeichnen wir mit H_φ^η die Menge aller Ordnungszahlen μ, für die $\varphi(\mu) \leqq \eta$ ist: $H_\varphi^\eta=\{\mu \in N: \varphi(\mu) \leqq \eta\}$. Nach b) existiert eine regressive Funktion ψ auf U und zu jedem $\alpha < \tau$ eine regressive Funktion φ_α auf $K_\alpha - \{x_\alpha\}$, so daß für jede $\mu < \Lambda$ die Menge H_ψ^μ bzw. $H_{\varphi_\alpha}^\mu$ $(\alpha < \tau)$ nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist. Es sei für $\alpha < \tau$

$$g_\alpha(\xi)=\begin{cases}\varphi_\alpha(\xi) & \text{für } \xi \in K_\alpha - H_{\varphi_\alpha}^{x_\alpha} - \{x_\alpha\},\\ x_\alpha & \text{für } \xi \in H_{\varphi_\alpha}^{x_\alpha}.\end{cases}$$

Da die Menge $H_{\varphi_\alpha}^{x_\alpha}$ $(\alpha < \tau)$ nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist, so ist g_α für jedes $\alpha < \tau$ eine regressive Funktion auf $K_\alpha - \{x_\alpha\}$ mit $g_\alpha(\xi) \geqq x_\alpha$ für $\xi \in K_\alpha - \{x_\alpha\}$. Es sei weiter

$$g(\xi)=\begin{cases}\psi(\xi) & \text{für } \xi \in U,\\ g_\alpha(\xi) & \text{für } \xi \in K_\alpha - \{x_\alpha\} \text{ und } \alpha < \tau.\end{cases}$$

g ist eine regressive Funktion auf $K=\bigcup_{\alpha<\tau} K_\alpha$, so daß für jedes $\mu < \Lambda$ die Menge H_g^μ nicht-zusammengehörig mit $W(\Lambda)$ ist. Würde nämlich eine Zahl $\mu_0 < \Lambda$ existieren, für die $H_g^{\mu_0}$ mit $W(\Lambda)$ zusammengehörig ist, so

[1]) Beim Beweis wird eine Modifikation eines Beweises von G. Bloch benutzt (vgl. [8], S. 266).

könnten die Elemente von $H_g^{\mu_0}$ entweder in U oder in Mengen $K_\alpha - \{x_\alpha\}$ mit $x_\alpha \leqq \mu_0$ vorkommen, also gäbe es entweder in der Menge U oder in einer Menge K_{α_0} mit $x_{\alpha_0} \leqq \mu_0$ eine mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge von $H_g^{\mu_0}$, im Widerspruch zur Definition von ψ bzw. g_{α_0}.

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Sei Λ eine Limeszahl mit $cf(\Lambda) > 0$ (d. h. Λ sei nicht mit ω konfinal) und M eine Teilmenge von $W(\Lambda)$. Wenn M stationär ist, so existiert zu jeder auf M definierten regressiven Funktion φ eine Ordnungszahl $\alpha < \Lambda$ und eine stationäre Teilmenge N von M, so daß $\varphi(\beta) \leqq \alpha$ für alle $\beta \in N$ ist.*

Beweis. Wir betrachten ein Band $B = \{\beta_\nu\}_{\nu < \omega_{cf(\Lambda)}}$ vom Typ $\omega_{cf(\Lambda)}$ in $W(\Lambda)$, wobei $\beta_0 = 0$ ist. Wir bezeichnen mit H_ν die Menge aller Ordnungszahlen $\mu \in M$, für die $\beta_\nu \leqq \varphi(\mu) < \beta_{\nu+1}$ ist: $H_\nu = \{\mu \in M : \beta_\nu \leqq \varphi(\mu) < \beta_{\nu+1}\}$. Offenbar ist $H_\sigma \cap H_\tau = 0$ für $\sigma \neq \tau$. Da B ein Band ist, da also $\lim\limits_{\nu<\lambda} \beta_\nu = \beta_\lambda$ für jede Limeszahl $\lambda < \omega_{cf(\Lambda)}$ und $\lim\limits_{\nu < \omega_{cf(\Lambda)}} \beta_\nu = \Lambda$ ist, so ergibt sich hieraus nach der Definition von H_ν, daß

$$M = \bigcup_{\nu < \omega_{cf(\Lambda)}} H_\nu$$

ist. Sei nun $\{H_{\nu_\xi}\}_{\xi < \tau}$ $(\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)})$ die Folge der nicht-leeren Mengen H_ν und y_{ν_ξ} sei das erste Element von H_{ν_ξ} für alle $\xi < \tau$. Da φ eine regressive Funktion ist, so ist $\beta_{\nu_\xi} < y_{\nu_\xi}$. Wir definieren nun auf der Menge $Y = \{y_{\nu_\xi}\}_{\xi < \tau}$ $(\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)})$ eine regressive Funktion ψ:

$$\psi(y_{\nu_\xi}) = \beta_{\nu_\xi}.$$

Man sieht sofort, daß $\psi(\alpha) \neq \psi(\beta)$ ist, wenn α und β zwei verschiedene Elemente von Y sind. So ergibt sich hieraus auf Grund von a), daß die Menge Y nicht-stationär ist. Da M stationär ist und

$$\bigcup_{\xi < \tau} H_{\nu_\xi} = M \qquad (\tau \leqq \omega_{cf(\Lambda)})$$

ist, existiert nach dem Hilfssatz ein $\xi_0 < \tau$, für das $H_{\nu_{\xi_0}}$ stationär ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Ist Λ eine reguläre Limeszahl $> \omega$ und M eine stationäre Teilmenge, so existiert für jede auf M definierte regressive Funktion φ eine stationäre Teilmenge von M von Argumenten, für die die Werte von φ einander gleich sind.*

Beweis. Sei $L_\alpha = \{\mu \in M : \varphi(\mu) = \alpha\}$. Nach Satz 1 existiert eine Zahl $\beta < \Lambda$ derart, daß die Menge N der $\gamma \in M$, für die $\varphi(\gamma) \leqq \beta$ gilt, stationär ist. Offenbar ist

$$N = \bigcup_{\alpha \leqq \beta} L_\alpha .$$

Da N stationär ist, existiert nach dem Hilfssatz eine Zahl α_0 $(\alpha_0 \leqq \beta < \Lambda)$, für die L_{α_0} stationär ist.

Literaturverzeichnis.

[1] P. S. Alexandroff—P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wiss. Amsterdam*, (1) **45**, Nr. 1, 1—96.

[2] Ben Dushnik, A note on transfinite ordinals, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 860—862.

[3] P. Erdös, Some remarks on set theory, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 127—141.

[4] J. Novák, A paradoxical theorem, *Fundamenta Math.*, **37** (1950), 77—83.

[5] W. Neumer, Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschrift*, **54** (1951), 254—261.

[6] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 1, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955), S. 43.

[7] G. Fodor, Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 204—206.

[8] G. Bloch, Sur les ensembles stationnaires de nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions regressives, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), 265—267.

(Eingegangen am 24. September 1956.)