Die Translationen der Halbverbände.

Von G. SZÁSZ in Szeged.

1. Einleitung. A. H. CLIFFORD hat in seiner Arbeit [2] bezüglich einer speziellen Klasse von Halbgruppen ein Erweiterungsproblem vom Schreierschen Typ gelöst. Zur Bestimmung aller Erweiterungen mit den vorgeschriebenen Eigenschaften benützt er auch die sogenannten Rechts- und Linkstranslationen der Halbgruppen.

Da jeder Halbverband zur in [2] betrachteten Klasse der Halbgruppen gehört, kann man die Cliffordsche Erweiterungstheorie auf die Halbverbände ohne weiteres anwenden. Es scheint uns deshalb nicht ohne Interesse zu sein, die Translationen von Halbverbänden näher zu untersuchen.

2. Allgemeines über Translationen von Halbverbänden. Im Laufe unserer Betrachtungen werden wir stets mit H einen Halbverband (d. h., eine kommutative Halbgruppe mit lauter idempotenten Elementen), und mit den Buchstaben x, y beliebige (nicht notwendig verschiedene) Elemente von H bezeichnen. Die griechischen Buchstaben werden eindeutige Abbildungen von H in sich bedeuten.

Eine eindeutige Abbildung

$$\lambda:\ x \to \lambda(x) \quad (x, \lambda(x) \in H) \tag{1}$$

heißt eine *Translation von H,* wenn für sie

$$\lambda(xy) = \lambda(x) \cdot y \tag{2}$$

besteht. Eine Translation λ heißt *speziell,* wenn es ein c ($\in H$) mit $\lambda(x) = cx$ gibt.

Besitzt H ein Einselement e, so folgt aus (2)

$$\lambda(y) = \lambda(ey) = \lambda(e) \cdot y = cy,$$

wobei c das Bild des Einselements bedeutet. Dementsprechend *ist in einem Halbverband mit Einselement jede Translation speziell.*

Wir zeigen, daß die Umkehrung auch richtig ist: *Ist in einem Halbverband H jede Translation speziell, so besitzt H ein Einselement*[1]. Die iden-

[1] Es ist leicht zu sehen, daß beide Behauptungen auch für beliebige Halbgruppen gültig bleiben, wenn man das Wort „Translation" durch „Linkstranslation (oder Rechtstranslation)" ersetzt.

tische Abbildung $\iota(x)=x$ ist offenbar eine Translation; ist sie speziell, so existiert ein c in H, so daß $x=(\iota(x)=)cx$ indentisch gilt. Daraus folgt, daß dieses c das Einselement von H ist.

Aus dem gesagten folgt, daß unsere nachstehenden Sätze im Fall von Halbverbänden mit Einselement Trivialitäten enthalten; sie sind also nur für Halbverbände ohne Einselement interessant.

Hier beweisen wir noch den

Satz 1. *Eine eindeutige Abbildung* (1) *eines Halbverbands H ist dann und nur dann eine Translation von H, wenn die Gleichungen*

$$\lambda(x)\cdot x=\lambda(x) \qquad (x\in H), \tag{3}$$

$$\lambda(x)\cdot y=\lambda(y)\cdot x \qquad (x,y\in H) \tag{4}$$

identisch gelten.

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß die Bedingungen des Satzes hinreichend sind. Durch wiederholte Anwendung von (3), (4) und mit Rücksicht auf die Halbverbandseigenschaften ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}\lambda(x)\cdot y=\lambda(x)\cdot x\cdot y=\lambda(x)\cdot xy=\lambda(xy)\cdot x=\\ =\lambda(xy)\cdot xy\cdot x=\lambda(xy)\cdot xy=\lambda(xy),\end{aligned}$$

wonach (2) in der Tat eine Folgerung von (3), (4) ist.

Die Bedingungen sind auch notwendig. Setzt man nämlich $y=x$ in (2), so folgt

$$\lambda(x)\cdot x=\lambda(xx)=\lambda(x);$$

ferner ergibt sich, durch zweifache Anwendung von (2),

$$\lambda(x)\cdot y=\lambda(xy)=\lambda(yx)=\lambda(y)\cdot x.$$

Damit haben wir den Beweis beendet.

3. Die Translationen von Halbverbänden als Endomorphismen. Wir schicken noch einige Definitionen voraus.

Wie üblich, verstehen wir unter einem *Endomorphismus* von H eine eindeutige Abbildung φ: $x\to\varphi(x)$ $(x,\varphi(x)\in H)$ mit der Eigenschaft $\varphi(xy)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$. Wir werden einen Endomorphismus φ (oder allgemeiner, eine beliebige Abbildung φ) *idempotent* nennen, wenn sie der Gleichung $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$ genügt.

Eine Teilmenge M von H heißt ein *Ideal* (von H), wenn aus $a\in M$, $x\in H$ immer $ax\in M$ folgt.

In diesem Paragraphen beweisen wir den

Satz 2. *Jede Translation λ eines Halbverbands H ist ein idempotenter Endomorphismus, und die Menge aller Bildelemente ist ein Ideal von H. Ist,* *umgekehrt, φ ein idempotenter Endomorphismus von H, bei dem die Menge aller Bildelemente ein Ideal von H bildet, so definiert φ eine Translation von H.*

Beweis. Es sei λ eine Translation des Halbverbands H. Nach Satz 1 besteht dann die Gleichung (4). Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\lambda(x)$, so ergibt sich

$$\lambda(x)\cdot y = \lambda(y)\cdot x\cdot\lambda(x);$$

wendet man jetzt auf die linke bzw. rechte Seite (2) bzw. (3) an, so folgt

$$\lambda(xy) = \lambda(y)\cdot\lambda(x) = \lambda(x)\cdot\lambda(y).$$

Hiernach ist die Translation λ ein Endomorphismus von H.

Setzt man jetzt $x=\lambda(y)$ in (3) ein, so entsteht die Gleichung

$$\lambda(\lambda(y))\cdot\lambda(y) = \lambda(\lambda(y)). \tag{5}$$

Andererseits ist, wieder nach (3),

$$\lambda(y)\cdot y = \lambda(y). \tag{6}$$

Multipliziert man (6) mit $\lambda(\lambda(y))$, so gewinnt nach (5)

$$\lambda(\lambda(y))\cdot y = \lambda(\lambda(y)).$$

Hieraus folgt nach (4)

$$\lambda(\lambda(y)) = \lambda(\lambda(y))\cdot y = \lambda(y)\cdot\lambda(y) = \lambda(y),$$

was genau die Idempotenz von λ bedeutet.

Es sei jetzt a ein beliebiges Bildelement bei der Translation λ; dann existiert mindestens ein $t(\in H)$, so daß $a=\lambda(t)$ ist. Ist ferner x ein beliebiges Element von H, so folgt nach (2)

$$ax = \lambda(t)\cdot x = \lambda(tx),$$

d. h., daß das Element ax auch ein Bildelement ist. Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Andererseits betrachten wir einen idempotenten Endomorphismus φ von H, bei dem die Menge der Bildelemente ein Ideal von H ist. Letzteres bedeutet, daß (nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch) $\varphi(x)\cdot y$ ein Bildelement ist. Folglich existiert ein $a(\in H)$, das der Gleichung $\varphi(x)\cdot y=\varphi(a)$ genügt. Ferner gilt nach den Voraussetzungen auch $\varphi(\varphi(a))=\varphi(a)$. Es folgt also die Gleichung

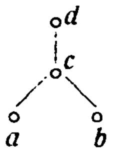
$$\varphi(x)\cdot y = [\varphi(a) = \varphi(\varphi(a)) =]\,\varphi(\varphi(x)\cdot y). \tag{7}$$

Da aber φ ein Endomorphismus — und zwar, ein idempotenter — ist, läßt sich die rechte Seite von (7) so umformen:

$$\varphi(\varphi(x)\cdot y) = \varphi(\varphi(x))\cdot\varphi(y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(xy). \tag{8}$$

Aus (7) und (8) ergibt sich nun sofort (2), womit der Beweis des Satzes beendet ist.

Bemerkung. Die Bedingung, daß die Bildelemente bei dem Endomorphismus φ in der Rede ein Ideal bilden, ist wesentlich. Man betrachte nämlich den Halbverband H, der durch das HASSE-Diagramm[2])

(9) 

gegeben ist, und definiere die Abbildung ψ durch

$$\psi(a)=a, \quad \psi(b)=\psi(c)=\psi(d)=d. \tag{10}$$

Dann kann man sich leicht überzeugen, daß die Abbildung ψ ein idempotenter Endomorphismus von H ist, bei dem aber die Menge aller Bildelemente kein Ideal ist[3]); und in der Tat ist ψ keine Translation von H, weil nach (9) und (10)

$$\psi(a)\cdot b=ab=c,$$

dagegen

$$\psi(ab)=\psi(c)=d$$

ist.

4. Die Translationen von Halbverbänden als Hüllenoperationen. Es sei H ein beliebiger Halbverband. Es ist bekannt ([3], Seite 22, Théorème 1), daß in H die Relation

„*$x \leqq y$ dann und nur dann, wenn $xy=y$ ist*“

eine Halbordnung definiert. Wir nennen sie die *natürliche Halbordnung* von H.

Eine eindeutige Abbildung σ: $x \to \sigma(x)$ $(x, \sigma(x) \in H)$ eines Halbverbands H heißt eine *Hüllenoperation*[4]), wenn sie den Bedingungen

(*Extensivität:*) $\qquad x \leqq \sigma(x)$

(*Idempotenz:*) $\qquad \sigma(\sigma(x))=\sigma(x)$

(*Monotonität:*) $\qquad$ *aus* $x \leqq y$ *folgt* $\sigma(x) \leqq \sigma(y)$

genügt, wobei $\leqq$ eine beliebige Halbordnung bedeuten darf. Es ist bekannt (ISÉKI [5], Theorem 1), daß diese Bedingungen für die natürliche Halb-

[2]) Für die Bedeutung des HASSE-Diagramms siehe z. B. [4], Seite 8.

[3]) Nämlich ist $a(=\psi(a))$ ein Bildelement, dagegen $ac=c$ kein Bildelement bei ψ.

[4]) Siehe [1], Seite 49.

ordnung der einzigen Bedingung

$$x \cdot \sigma(\sigma(x)) \leqq \sigma(xy) \tag{11}$$

äquivalent sind.

Wir beweisen den

Satz 3. *Jede Translation eines Halbverbands ist für die natürliche Halbordnung eine Hüllenoperation.*

Beweis. Nach dem oben gesagten genügt es zu zeigen, daß die Ungleichung (11) für jede Translation λ und für die natürliche Halbordnung des Halbverbands H erfüllt ist. Nach Satz 2 und nach den Gleichungen (3), (2) folgt aber sofort

$$x \cdot \lambda(\lambda(x)) = x \cdot \lambda(x) = \lambda(x) \leqq \lambda(x) \cdot y = \lambda(xy),$$

was zu beweisen war.

Wir bemerken noch, daß die Abbildung ψ im Beispiel des vorigen Paragraphen auch eine Hüllenoperation ist.

Literatur.

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. **25**), revised edition (New York, 1948).

[2] A. H. Clifford, Extensions of semigroups, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 165—173.

[3] M. L. Dubreil-Jacotin—L. Lesieur—R. Croisot, *Théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* (Cahiers scientifiques, fasc. XXI, Paris, 1953).

[4] H. Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie* (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. LXXIII, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955).

[5] K. Iséki, On closure operation in lattice theory, *Proceedings Acad. Amsterdam*, **54** (1951), 318—320.

(Eingegangen am 3. Oktober 1956.)